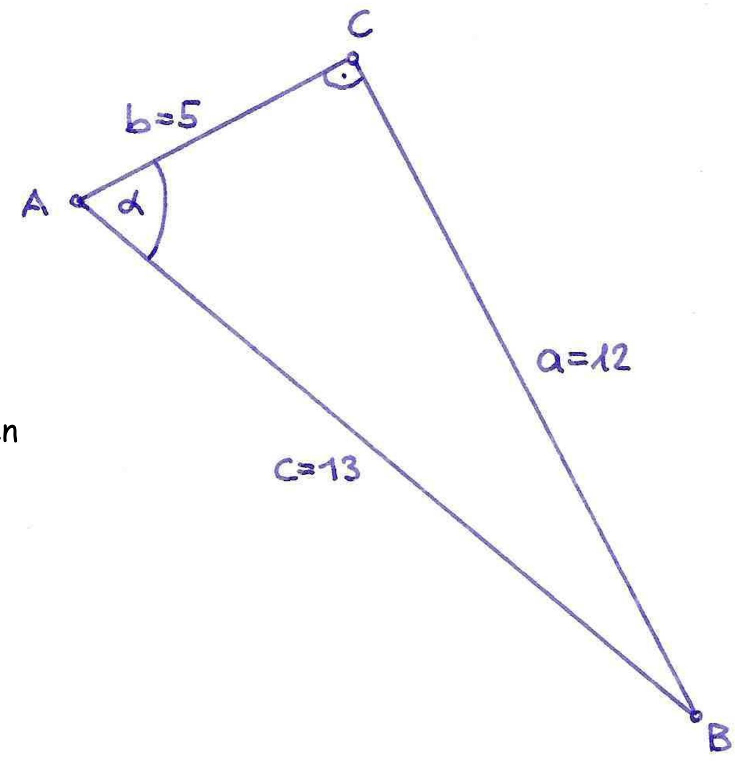
Für alle Aufgaben gilt:

1. Winkel und Strecken sind auf eine, Winkelfunktionen auf 4 Nachkommastellen zu runden; nehmen Sie für Zwischenresultate mit denen Sie weiterrechnen eine Stelle mehr
2. Erstellen Sie immer eine Skizze von Hand – es sei denn, es ist eine exakte Konstruktion verlangt

Aufgabe 1:
Ein rechtwinkliges Dreieck hat die Katheten a = 12 cm und b = 5 cm.
(Konstruieren Sie das Dreieck ABC – die Seite a ist bereits gezeichnet)

a) die Ankathete des Winkels α ist: _b_
die Gegenkathete des Winkels α ist: _a_
die Gegenkathete des Winkels β ist: _b_
die Ankathete des Winkels β ist: _a_



b) Berechnen Sie die Hypothenuse c:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$c = \sqrt{144 + 25}$$
$$c = 13$$

c) Berechnen Sie die Winkelfunktionen $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, und $\tan\alpha$

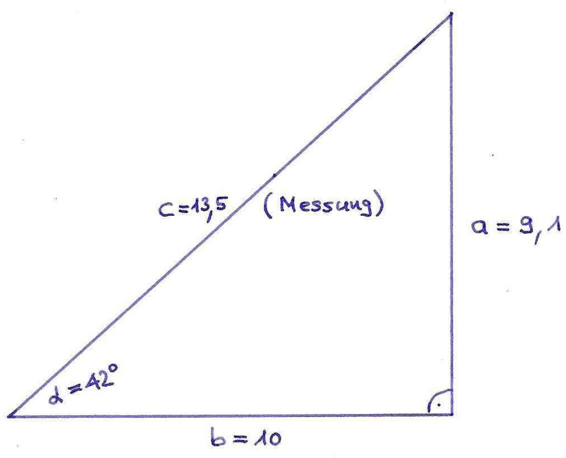
$$\sin\alpha = \frac{G}{H} = \frac{12}{13} = 0{,}9231$$
$$\cos\alpha = \frac{A}{H} = \frac{5}{13} = 0{,}3846$$
$$\tan\alpha = \frac{G}{A} = \frac{12}{5} = 2{,}4000$$

d) Berechnen Sie die Winkel α und β:

$\alpha = \arcsin\frac{12}{13} = 67{,}38^0$ oder $\alpha = \arctan\frac{12}{5} = 67{,}38^0$

$$\beta = 90^0 - 67{,}38^0 = 22{,}62^0$$

Aufgabe 2:
Berechnen sie ohne TR die Werte sin(42°), cos(42°), tan(42°) und cot(42°) auf zwei Dezimalen genau durch Konstruktion eines rechtwinkligen Dreiecks und Messung der Seiten auf eine Dezimale genau. Geben Sie zum Vergleich die exakten Werte aus dem TR an:



$\sin 42^0 = \frac{G}{H} = \frac{9{,}1}{13{,}5} = 0{,}67$ TR: $\sin 42^0 = 0{,}67$

$\cos 42^0 = \frac{A}{H} = \frac{10}{13{,}5} = 0{,}74$ TR: $\cos 42^0 = 0{,}74$

$\tan 42^0 = \frac{G}{A} = \frac{9{,}1}{10} = 0{,}91$ TR: $\tan 42^0 = 0{,}90$

Aufgabe 3:
Eine Strasse hat eine Steigung von 20% - welchem Neigungswinkel entspricht das?

$$\arctan \frac{20}{100} = 11{,}3^0$$

Aufgabe 4:
Gegeben ist die lineare Funktion y = 2x + 3. Welchen Winkel bildet der Graf dieser Funktion mit   a) der x-Achse   b) mit der y-Achse?

Mit der x-Achse:
$m = 2 = \tan\alpha$
$\alpha = \arctan 2 = 63{,}4^0$
Mit der y-Achse:
$\beta = 90^0 - 63{,}4^0 = 26{,}6^0$

Aufgabe 5:

In einem rechtwinkligen Dreieck ist b = 20 cm und α = 39°.
Berechnen Sie die anderen beiden Seiten und den Winkel β:

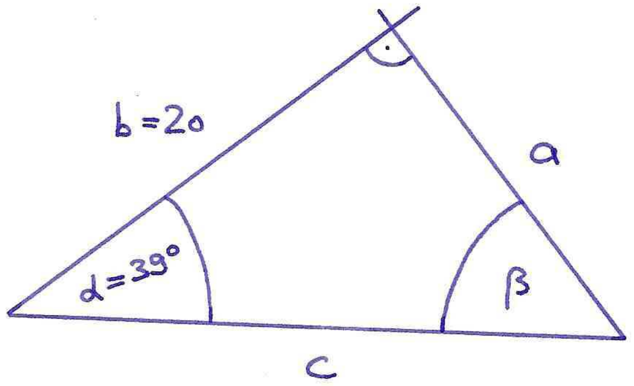
$$\beta = 90^0 - 39^0 = 51^0$$

$$\frac{a}{b} = \tan\alpha \qquad | \cdot b$$

$$a = b \cdot \tan\alpha \qquad | \text{Werte einsetzen}$$

$$a = 20 \cdot \tan 39^0$$

$$a = 16{,}20$$



$$\frac{b}{c} = \cos\alpha \qquad | \text{Kehrwert bilden}$$

$$\frac{c}{b} = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad | \cdot b$$

$$c = \frac{b}{\cos\alpha}$$

$$c = \frac{20}{\cos 39^0} \qquad | \text{Werte einsetzen}$$

$$c = 25{,}74$$

Aufgabe 6:
In einem rechtwinkligen Dreieck ist b = 20 cm und $\tan\beta$ = 1,5.
Berechnen Sie die anderen beiden Seiten und die Winkel α und β:

$$\beta = \arctan 1{,}5 = 56{,}3^0$$

$$\alpha = 90^0 - 56{,}3^0 = 33{,}7^0$$

$$\tan\beta = 1{,}5 = \frac{20}{a}$$

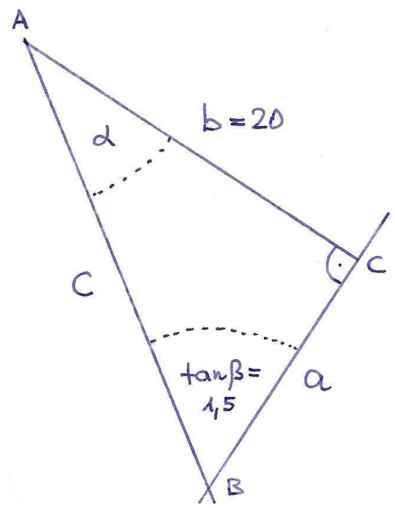
$$a = \frac{20}{1{,}5} = 13{,}3$$

$$\beta = \arctan 1{,}5 = 56{,}3^0$$

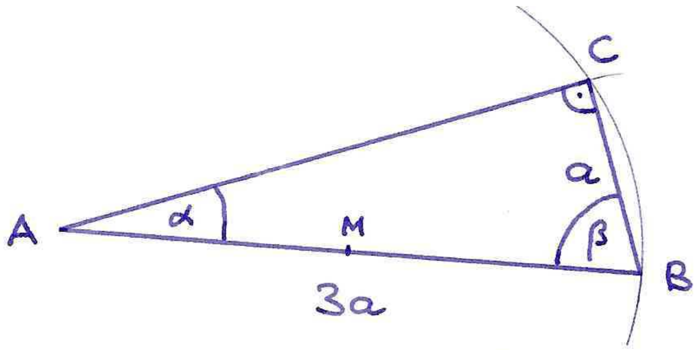
Z.B.: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$c = \sqrt{20^2 + \left(\frac{20}{1{,}5}\right)^2}$$

$$c = 24{,}0$$



Aufgabe 7:
In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypothenuse dreimal so lang wie die Kathete a. Berechnen Sie die Winkel α und β:

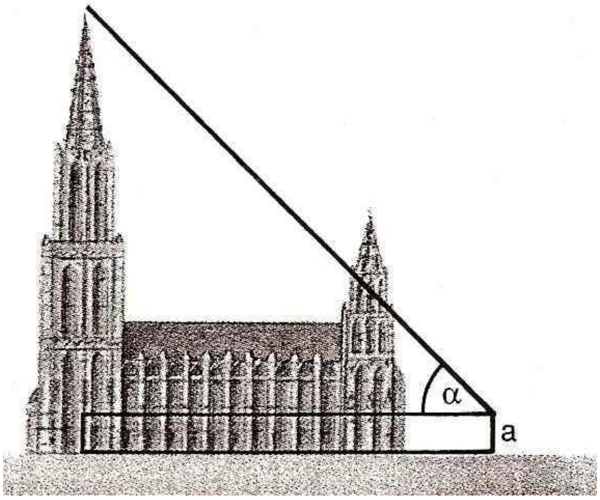


$$\cos\beta = \frac{A}{H} = \frac{a}{3a} = \frac{1}{3}$$

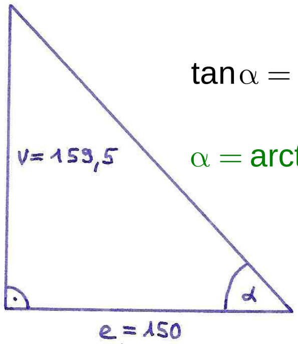
$$\beta = \arccos\frac{1}{3} = 70{,}5^0$$

$$\alpha = 90^0 - \beta = 90^0 - 70{,}5^0 = 19{,}5^0$$

Aufgabe 8:



a) Unter welchem Elevationswinkel α erscheint die Spitze eines 161 m hohen Doms von einer Stelle aus, die in horizontaler Richtung e = 150 m vom Fuss des Turmes entfernt ist? Die Augenhöhe a beträgt 1.5 m.



$$\tan\alpha = \frac{159{,}5}{150}$$

$$\alpha = \arctan\frac{159{,}5}{150} = 46{,}8^0$$

b) Um wie viele Meter berechnen Sie die Turmhöhe zu niedrig wenn Sie den in a) gemessenen Winkel α auf das nächste Winkelgrad abrunden?
Also: $\alpha = 46^0$, e = 150, v=?

$$\tan\alpha = \frac{v}{e}$$

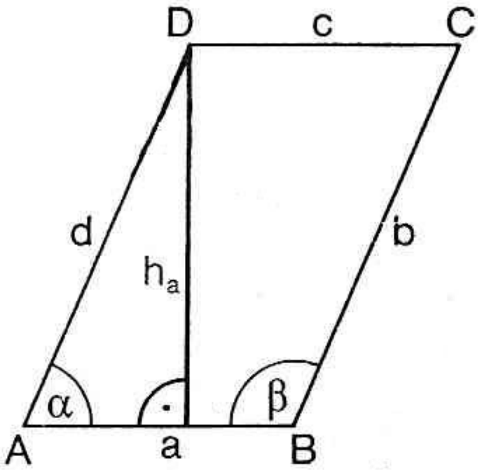
$$v = e \cdot \tan\alpha$$

$$v = 150 \cdot \tan 46^0$$

$$v = 150 \cdot \tan 46^0 = 155{,}3$$

Die Turmhöhe wird um 161 – (155,3 + 1,5) = 4,2 m zu niedrig gemessen

Aufgabe 9:



Welchen Flächeninhalt hat ein Parallelogramm (Rhomboid) wenn folgende Grössen gegeben sind:

a) a = 8 cm, d = 10 cm, α = 60°

$$\sin\alpha = \frac{G}{H} = \frac{h_a}{d}$$
$$h_a = d \cdot \sin\alpha$$

Fläche Rhomboid = Grundseite mal Höhe:

$$A_{ABCD} = a \cdot h_a$$
$$A_{ABCD} = a \cdot d \cdot \sin\alpha$$

remember: $\sin 60^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$:

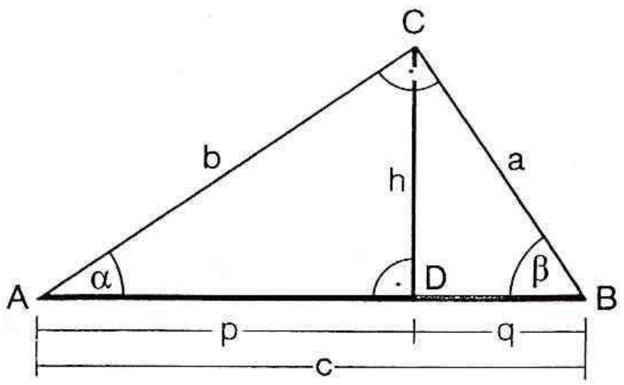
$$A_{ABCD} = 8 \cdot 10 \cdot \sin 60^0 = 80 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = 69{,}3$$

b) a = 12 m, b = 7,5 m, β = 125°

1. $\alpha = 180^0 - \beta = 180^0 - 125^0 = 55^0$
2. $d = b$
3. also: a, d, α bekannt wie in a):

$$A_{ABCD} = a \cdot d \cdot \sin\alpha$$
$$A_{ABCD} = 12 \cdot 7{,}5 \cdot \sin 55^0 = 90 \cdot \sin 55^0 = 73{,}7$$

Aufgabe 10:



Berechnen Sie die Höhenabschnitte p und q sowie die Höhe h des rechtwinkligen Dreiecks wenn folgende Grössen gegeben sind:

a) $a = 6 \quad c = 10$

$b = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ Kathetensatz: $b^2 = pc \rightarrow p = \frac{b^2}{c} = \frac{64}{10} = 6{,}4$

$q = c - p = 10 - 6{,}4 = 3{,}6$

Höhensatz: $h^2 = pq \rightarrow h = \sqrt{pq} = \sqrt{6{,}4 \cdot 3{,}6} = 4{,}8$

b) $b = 4{,}5 \qquad \alpha = 43{,}5°$

$\frac{h}{b} = \sin\alpha \rightarrow h = b \cdot \sin\alpha \rightarrow h = 4{,}5 \cdot \sin 43{,}5^0 \rightarrow h = 3{,}1$

$\frac{p}{b} = \cos\alpha \rightarrow p = b \cdot \cos\alpha \rightarrow p = 4{,}5 \cdot \cos 43{,}5^0 \rightarrow p = 3{,}3$

$\rightarrow$ Höhensatz: $h^2 = pq \rightarrow q = \frac{h^2}{p} = \frac{(b \cdot \sin\alpha)^2}{b \cdot \cos\alpha} = \frac{b \cdot \sin^2\alpha}{\cos\alpha} = 2{,}9$

c) $a = 8 \quad \alpha = 28° \rightarrow \beta = 62°$

$\frac{a}{b} = \tan\alpha\,;\ b = \frac{a}{\tan\alpha} = 15{,}046$

$\rightarrow$ Pythagoras: $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{\tan^2\alpha}} = 17{,}040$

$\frac{c \cdot h}{2} = \frac{a \cdot b}{2}$ (Dreieckesfläche) $\rightarrow h = \frac{a \cdot b}{c} = \frac{8 \cdot 15{,}05}{17{,}04} = 7{,}07$

$\rightarrow$ Kathetensatz: $b^2 = pc \rightarrow p = \frac{b^2}{c} = \frac{15{,}046^2}{17{,}040} = 13{,}29$

$\rightarrow$ Kathetensatz: $a^2 = qc \rightarrow q = \frac{a^2}{c} = \frac{8^2}{17{,}040} = 3{,}76$

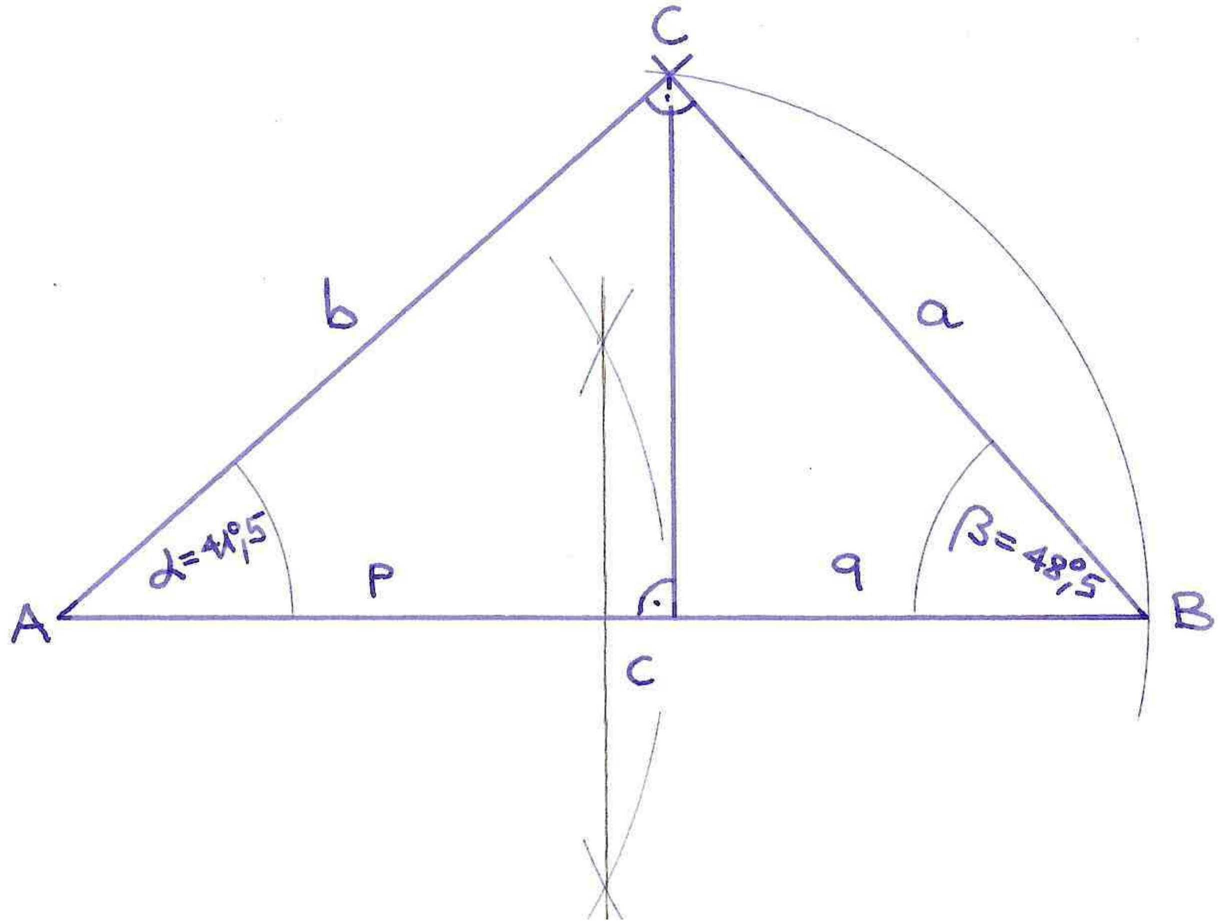
d) c = 14,5 m β = 48,5° → α = 41,5°

$\frac{a}{c} = \cos\beta;\ a = c \cdot \cos\beta$ $\frac{b}{c} = \cos\alpha;\ b = c \cdot \cos\alpha$

Kathetensatz: $pc = b^2 \rightarrow p = \frac{b^2}{c} = \frac{c^2 \cdot \cos^2\alpha}{c} = c \cdot \cos^2\alpha = 8{,}13$

$qc = a^2 \rightarrow q = \frac{a^2}{c} = \frac{c^2 \cdot \cos^2\beta}{c} = c \cdot \cos^2\beta = 6{,}37$

Höhensatz: $h = \sqrt{pq} \rightarrow h = \sqrt{c \cdot \cos^2\alpha \cdot c \cdot \cos^2\beta} = c \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta = 7{,}20$



Ein Tipp:
Da die Geometrie auf konstruktive Weise dieselben Ergebnisse liefert wie die Trigonometrie, können Sie anstelle einer Skizze gleich die exakte Konstruktion nach den Kongruenzsätzen durchführen, das dauert nicht wesentlich länger; Sie bekommen dafür dann eine Kontrollmöglichkeit ob Ihre berechneten Längen und Winkel in etwa stimmen. Längen stimmen fast auf den Millimeter, Winkel etwa auf ein Grad genau.

Messen Sie die Resultate von d) in der Konstruktion oben nach!

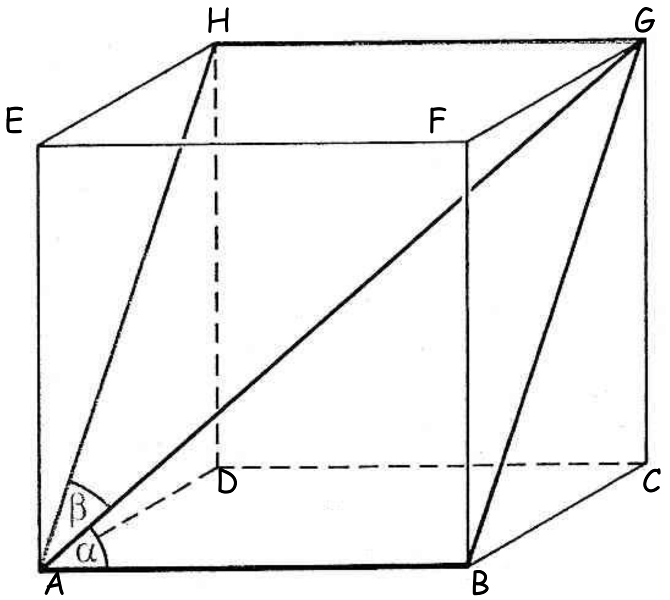
So dazwischen – zum durchatmen:
Beantworten Sie die Frage jeweils innerhalb von 3 Sekunden nach dem Lesen:

a. Monikas Vater hat 5 Töchter.
Sie heissen Lala, Lele, Lolo und Lulu – wie heisst die fünfte Tochter?

b. Sie nehmen an einem Hundertmeterlauf teil.
Sie überholen den Zweiten – auf welchem Platz sind Sie jetzt?

c. Sie nehmen an einem Hundertmeterlauf teil.
Sie überholen den Letzten – auf welchem Platz sind Sie jetzt?

Aufgabe 11:
Gegeben ist ein Würfel mit der Seitenlänge a:



a) Berechnen Sie den Winkel α, den die eingezeichnete Körperdiagonale mit der vorderen, unteren Kante bildet
b) Berechnen Sie den Winkel β den die eingezeichnete Körperdiagonale mit der linken Flächendiagonalen bildet

Zuerst die Figur betrachten und nicht drauflos rechnen! Man stellt fest:
ABGH ist ein Rechteck! (Begründen Sie!)
Demzufolge ist $\beta = 90^0 - \alpha$, die Aufgabe b) erübrigt sich also.

Es reicht nun α zu berechnen. Wir wählen Δ_{ABG} und stellen fest, dass $\sphericalangle ABG$ ein rechter Winkel ist.

Kopfgeometrie – ohne das Dreieck in wahrer Grösse zu zeichnen:

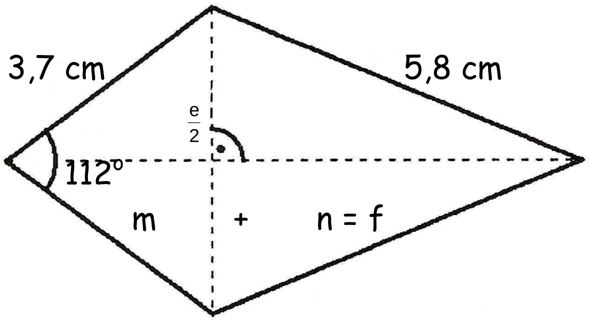
Ankathete von α:	Strecke AB - Würfelseite s
Gegenkathete von α:	Strecke BG – Flächendiagonale $d = s\sqrt{2}$
Hypothenuse:	Strecke AG – Körperdiagonale $k = s\sqrt{3}$

Also wählen Sie eine Winkelfunktion aus die heute gerade zu Ihrer Stimmung passt und berechnen Sie mit der entsprechenden Arkusfunktion α:

Beispiel Kosinus: $\cos\alpha = \frac{A}{H} = \frac{s}{s\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\alpha = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}} = 54,74^0$ und damit $\beta = 35,26^0$

Aufgabe 12:
Berechnen Sie von folgendem Drachenviereck die Fläche A:



Sei e die vertikale Diagonale e und die horizontale f; diese sei durch die Diagonale e in den linken Teil m und den rechten Teil n aufgeteilt.

Wir lenken alle unsere Aufmerksamkeit auf das obere linke Teildreieck (an der Prüfung machen Sie eine Skizze!) und nennen den Winkel links α.

1. α misst 56°; da ein Drachenviereck der Diagonalen, die von der anderen NICHT halbiert wird symmetrisch ist.
2. Mit der Gegenkathete $\frac{e}{2}$ erhalten wir:

   $$\frac{\frac{e}{2}}{3{,}7} = \sin\alpha\,;\ e = 2\cdot 3{,}7\cdot\sin 56^0 = 6{,}135$$

   Mit der Ankathete m erhalten wir:

   $$\frac{m}{3{,}7} = \cos\alpha\,;\ m = 3{,}7\cdot\cos 56^0 = 2{,}069$$

Wir lenken alle unsere Aufmerksamkeit auf das obere rechte Teildreieck (an der Prüfung machen Sie eine Skizze!) und nennen den Winkel rechts β.

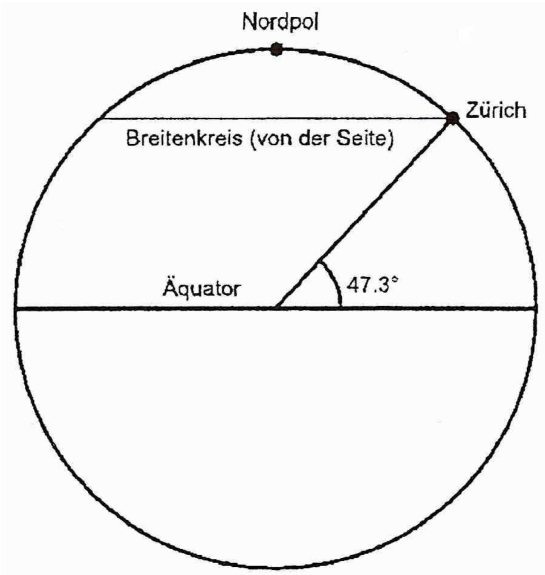
3. $\frac{\frac{e}{2}}{5{,}8} = \tan\alpha\,;\ \frac{\frac{6{,}135}{2}}{5{,}8} = 0{,}529 = \tan\alpha\,;\qquad \alpha = \arctan(0{,}529) = 27{,}88^0$ (ist aber nicht gefragt; man soll auch nicht zu viel rechnen an einer Prüfung – also Punkt 3 vergessen)

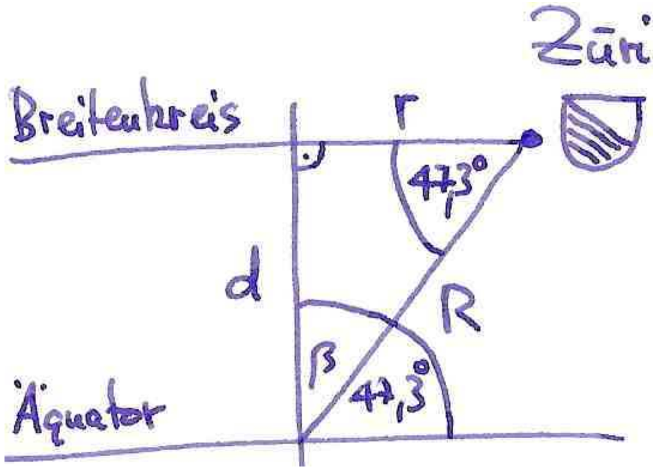
4. Pythagoras: $n^2 = 5{,}8^2 - \left(\frac{e}{2}\right)^2 \rightarrow\quad n = \sqrt{5{,}8^2 - \left(\frac{6{,}135}{2}\right)^2} = 4{,}922$

   Somit ergibt sich für die Diagonale f: $f = m + n = 2{,}069 + 4{,}922 = 6{,}991$
5. Wir haben nun die Längen der Diagonalen berechnet:
   e = 6,135 und
   f = 6,991
   Die Fläche des Drachens ergibt sich nun zu:

   $$A_{Drachen} = \frac{e\cdot f}{2} = \frac{6{,}135\ \cdot 6{,}991}{2} = 21{,}44\ cm^2$$

Aufgabe 13:
Zürich liegt auf einer geografischen Breite von 47,3°, der Erdradius R beträgt 6370 km.
a) Welchen Umfang hat der Breitenkreis mit Radius r, auf dem Zürich liegt?





Aus der Zusatzskizze können wir entnehmen:

$$\frac{r}{R} = \frac{A}{H} = \cos 47{,}5^0;\ r = R \cdot \cos 47{,}5^0$$

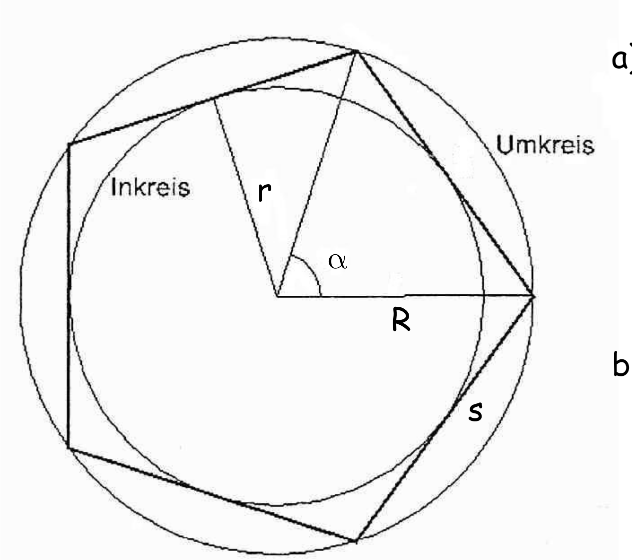
$$u = 2\pi r = 2\pi R \cos 47{,}3^0 = 2\pi \cdot 6370 \cdot 0{,}6782 = 27142{,}6\ \text{km}$$

b) Mit welcher Geschwindigkeit (km/h) dreht sich Zürich um die Erde?

In 24h einmal rum, dideldum: Ein Dreisatz:

24h	≙	27142,6 km	
1h	≙	1130,9 km	Zürich dreht sich mit 1131 km/h um die Erde

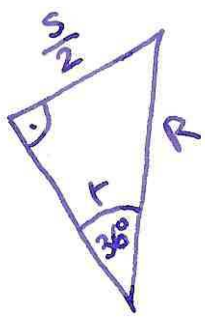
Aufgabe 14:
Jedes regelmässige Vieleck (reguläres n-Eck oder Polygon) besitzt einen Inkreis und einen Umkreis.
Gegeben ist ein reguläres Fünfeck mit einem Umkreisradius R = 10 cm.



a) Wie gross ist der Zentriwinkel α ?

$$\alpha = \frac{360^0}{5} = 72^0$$

b) Wie lang ist die Seite s des Fünfecks?



Wir betrachten 'einen Zehntel' des Fünfecks:
(Skizze nebenan)

$$\sin 36^0 = \frac{\frac{s}{2}}{R} = \frac{s}{2R};\ s = 2R\sin 36^0$$

$$s = 2R\sin 36^0 = 1{,}1756R$$

c) Wie lang ist der Inkreisradius r?

$$\cos 36^0 = \frac{r}{R};\ r = R\cos 36^0 = 0{,}8090R$$

d) Wie gross ist die Fünfecksfläche A_5?

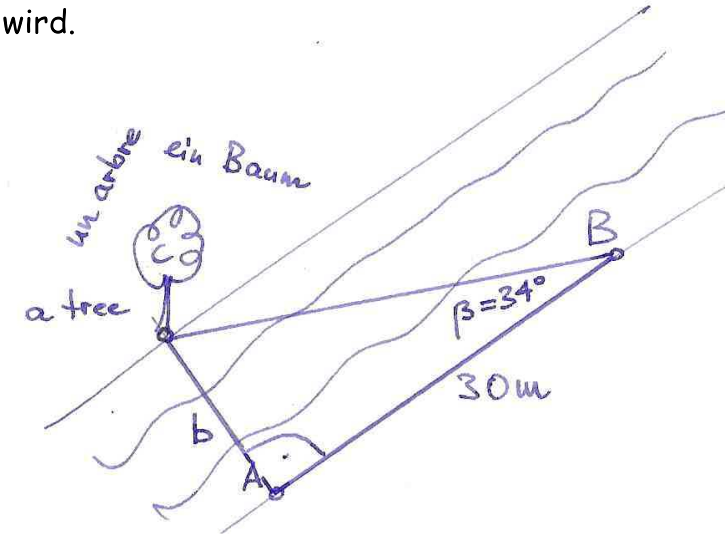
Aus der Skizze ist abzulesen:

Fläche des Dreiecks = $\Delta_5 = \dfrac{\frac{s}{2}r}{2} = \dfrac{\frac{2R\sin 36^0}{2}r}{2} = \dfrac{\frac{2R\sin 36^0}{2}R\cos 36^0}{2} = \dfrac{1}{2}R^2\sin 36^0\cos 36^0$

A5 besteht aus 10 solchen Dreiecken:

$$A_5 = \frac{1}{2}\sin 36^0\cos 36^0 \cdot R^2 = 0{,}5\cdot 0{,}5878\cdot 0{,}8090 = 0{,}2378R^2$$

Aufgabe 15:
Es soll die Breite b eines Flusses gemessen werden. Zu diesem Zweck wird dem Ufer entlang eine Standlinie $\overline{AB} = 30\text{ m}$ abgesteckt. Punkt A genau gegenüber (also senkrecht zur Standlinie) steht ein Baum C, der von B unter dem Winkel $\sphericalangle(ABC) = 34^0$ gesehen wird.



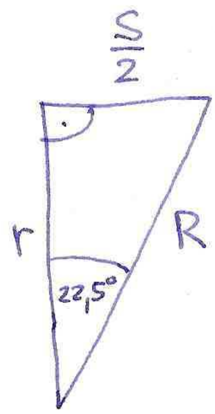
Sie können's schon bald auswendig:

$$\frac{b}{30} = \frac{G}{A} = \tan 34^0$$

$$b = 30 \cdot \tan 34^0 = 20{,}24\text{ m}$$

Aufgabe 16:
Berechnen Sie den Umkreisradius eines regulären Achtecks mit Seitenlänge s = 5 cm.

Wir betrachten wieder dasselbe Teildreieck wie in Aufgabe 14.
Der Zentriwinkel einer Seite eines Achtecks ist 45°, der Winkel in nebenstehendem Dreieck die Hälfte davon.
Zu beachten: In Aufgabe 14 war der Umkreisradius gegeben, hier ist es die Seite.



$$\sin 22{,}5^0 = \frac{G}{H} = \frac{\frac{s}{2}}{R} = \frac{s}{2R}$$

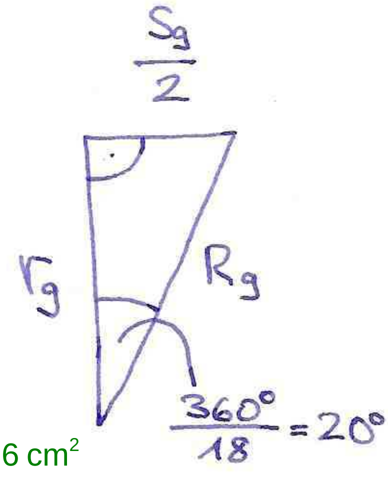
$$2R\sin 22{,}5^0 = s$$

$$R = \frac{s}{2\sin 22{,}5^0} = 1{,}307s$$

Nun ist Zeit, diese Formel zu verallgemeinern: Allgemein für ein n-Eck gilt:

$$R_n = \frac{1}{2\sin\left(\frac{360^0}{2n}\right)} s_n$$

Aufgabe 17:
Berechnen Sie den Flächeninhalt eines regulären 9-Ecks mit Seitenlänge s = 25 cm.



Aus nebenstehender Skizze entnehmen wir:

$$\frac{\frac{s_9}{2}}{r_9} = \tan 20^0$$ und damit ergibt sich:

(die Umformungen sind Ihnen nun geläufig)

$$r_9 = \frac{s_9}{2\tan 20^0}$$

Damit ist die Dreiecksfläche:

$$\Delta_9 = \frac{\frac{s_9}{2} r_9}{2} = \frac{s_9 r_9}{4} = \frac{s_9 \frac{s_9}{2\tan 20^0}}{4} = \frac{s_9^2}{8\tan 20^0} = \frac{25^2}{8 \cdot 0{,}3640} = 214{,}6\ \text{cm}^2$$

Und damit ist die Neunecksfläche (18 mal die Dreiecksfläche):

$$A_9 = 18 \cdot 214.6\ \text{cm}^2 = 3862{,}8\ \text{cm}^2$$

Abschätzung:

Man nehme die Kreisfläche mit $r = r_9$:

$$A_{\text{Inkreis}} = \pi r_9^2 = \pi\left(\frac{s_9}{2\tan 20^0}\right)^2 = \pi\left(\frac{25}{2\tan 20^0}\right)^2 = 3705{,}4\ \text{cm}^2$$

Diese ist etwas kleiner als die 9-Eck-Fläche

Damit hätten wir den Maturastoff Trigonometrie im Kasten!