Wir gehen von den Gleichungen $c = b^a$ und dem Beispiel $8 = 2^3$ aus:

$x = b^a$ x nennt man →Potenz; b nennt man → Basis; a nennt man → Exponent

Beispiel: $x = 2^3 = 8$

Vorgang: potenzieren
"8 ist die 3. Potenz zur Basis 2"
"8 ist 2 hoch 3"

Allgemein:

"x ist die a-te Potenz zur Basis b"
"x ist b hoch a"

$c = x^a$ c nennt man →Potenz; x nennt man → Basis; a nennt man → Exponent

Beispiel: $8 = x^3; x = \sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} = 2$

Vorgang: Wurzel ziehen
"2 ist die 3. Wurzel von 8"

Allgemein:

Unter der Wurzel $x = \sqrt[a]{c}$ versteht man
die Basis x in der Gleichung $c=x^a$
"x ist die a-te Wurzel aus c"

$c = b^x$ c nennt man →Potenz; b nennt man → Basis; x nennt man → Exponent

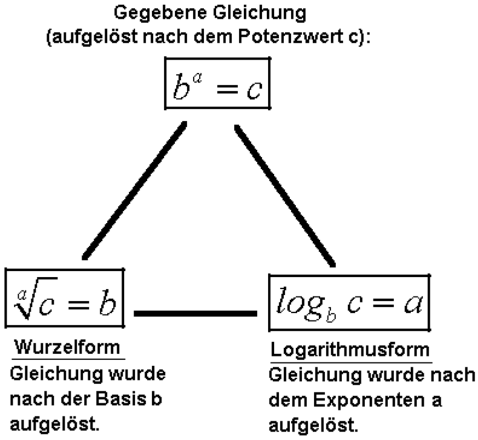
Beispiel: $8 = 2^x; x = \log_2(8) = 3$

Vorgang: logarithmieren
"3 ist der Logarithmus von 8 zur Basis 2"
"3 ist der 2er-Logarithmus von 8"

Allgemein:

Unter dem Logarithmus $x = \log_b c$ versteht man
den Exponenten x in der Gleichung $c=b^x$
"x ist der Logarithmus von c zur Basis b"

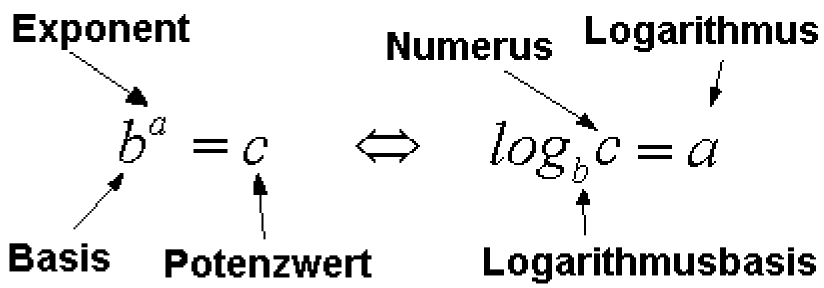
Zusammenfassung:



Das Bild fasst nochmals zusammen, was wir bisher erklärt haben:
Die Gleichung $b^a = c$ kann man noch auf zwei andere Arten schreiben:
Als Wurzel oder als Logarithmus.

Welche Schreibweise man wählt, hängt immer davon ab, welche der Grössen (Basis, Exponent, Potenzwert) unbekannt ist, d.h. nach welcher Grösse (Basis, Exponent, Potenzwert) die Formel umgestellt werden soll.

Wenn man von der Potenzschreibweise einer Gleichung zur Logarithmusschreibweise übergeht, dann verändern sich auch die Bezeichnungen:



Die Tabelle fasst das Bild nochmals zusammen:

Variable	Potenzschreibweise	Logarithmusschreibweise
a	Exponent	Logarithmus
b	Basis	Logarithmusbasis (Basis)
c	Potenzwert (Potenz)	Numerus

Wie alles begann: Potenzen – als Abkürzung einer mehrfachen Multiplikation:

$10^5 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100'000$

Man bemerkt:

Zahl	in Potenzform	Potenz als ganze Zahl	
100'000	10^5	5	
10'000	10^4	4	
1'000	10^3	3	
100	10^2	2	
10	10^1	1	allgemein; $a = a^1$
1	10^0	0	allgemein; $a^0 = 1$
$\frac{1}{10}$	10^{-1}	-1	
$\frac{1}{100}$	10^{-2}	-2	
$\frac{1}{1'000}$	10^{-3}	-3	

Allgemein definiert man: (1) $a^{-b} = \frac{1}{a^b}$

Man bemerkt:

$\sqrt[3]{c^3} = c^1$ andererseits gilt : $\left(c^3\right)^x = c^{3 \cdot x}$

$\sqrt[3]{c^3} = c^1 = c^{3 \cdot \frac{1}{3}} = \left(c^3\right)^{\frac{1}{3}}$

Allgemein definiert man: (2) $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

Zusammengefasst gilt: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Dies kann man als "Abschaffung der Wurzelzeichen" bezeichnen.

Potenzgesetze:

$\left(a^b\right)^c = a^{b \cdot c}$ (hoch) Potenz potenzieren

⇔ (mal) Exponenten multiplizieren

$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$ (mal) Potenzen multiplizieren $\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$

⇔ (plus) Exponenten addieren

$a^b + a^c =$  (plus) Potenzen addieren

⇔ (nichts) keine Exponentenregel

Verschiedene Basen, gleiche Exponenten:

$a^c \cdot b^c = (a \cdot b)^c$ $\frac{a^c}{b^c} \cdot = \left(\frac{a}{b}\right)^c$

Anwendungen:

1. $2^9 + 2^2 = 515 + 4 = 519$ (kein Gesetz)

2. $2^7 \cdot 2^3 = 2^{7+3} = 2^{10} = 1024$

3. $3^{2^4} = 3^{\left(2^4\right)} = 3^{16} = 43'046'721$ (Potenzreihenfolge beachten!)

4. $\left(3^2\right)^4 = 9^4 = 6'561$

5. Wie viele Nullen hat $10^{\left(3^3\right)}$ und wie heisst sie? 27 100'000 Quintillionen oder 100 Quintilliarden

6. Wie viele Nullen hat $1000^{\left(10^6\right)^{\left(10^{10}\right)}}$? 180 Milliarden
   Wie lang würde diese Zahl wenn jede Stelle 2mm bräuchte?
   - Der Umfang der Erde beträgt 40'000 km
   - Was meint Ihr Rechner dazu?

   Es reicht 9 Mal um die Erde!

7. Schreiben Sie alle Zahlen als Potenz einer kleinen Primzahl und fassen Sie dann zusammen. Schreiben Sie das Ergebnis als Potenz:
   $$\frac{1}{128} \cdot \frac{27}{1024} \cdot \frac{2^{17}}{81} \cdot 243 \cdot \frac{1}{3^2} = 3^2$$

Bemerkungen:

Einschränkungen (ohne Beweis):

Der Logarithmus von c zur Basis b ist der Exponent x, mit dem man eine Basis b potenzieren muß, um den Potenzwert (Numerus) c zu erhalten:

$$\boxed{b^x = c \quad \Leftrightarrow \quad \log_b c = x}$$

$$b, c \in R_{>0} \quad b \neq 1$$

In Worten:

1. Die Basis eines Logarithmus muss positiv und verschieden von 1 sein
2. Man kann nur von positiven Zahlen einen Logarithmus berechnen

Bsp. 1

Gesucht ist:	$\log_3 9 = x$
Äquivalente Gleichung:	$3^x = 9$
In Worten:	Mit welcher Zahl x muss ich 3 potenzieren um die Zahl 9 zu erhalten?
Die Lösung raten wir:	$x = 2$

Bsp. 2

Gesucht ist:	$\log_2 16 = x$
Äquivalente Gleichung:	$2^x = 16$
In Worten:	Mit welcher Zahl x muss ich 2 potenzieren um die Zahl 16 zu erhalten?
Die Lösung raten wir:	$x = 4$

Bsp. 3

Gesucht ist:	$\log_5 125 = x$
Äquivalente Gleichung:	$5^x = 125$
In Worten:	Mit welcher Zahl x muss ich 5 potenzieren um die Zahl 125 zu erhalten?
Die Lösung raten wir:	$x = 3$

Bsp. 4

Gesucht ist:	$\log_{10} 1000 = x$
Äquivalente Gleichung:	$10^x = 1000$
In Worten:	Mit welcher Zahl x muss ich 10 potenzieren um die Zahl 1000 zu erhalten?
Die Lösung raten wir:	$x = 3$

Übung 1

Gesucht ist:	$\log_{10}100 = x$
Äquivalente Gleichung:	
In Worten:	Mit welcher Zahl x muss ich ___ potenzieren um die Zahl ___ zu erhalten?
Die Lösung raten wir:	

Übung 2

Gesucht ist:	$\log_{2}32 = x$
Äquivalente Gleichung:	
In Worten:	Mit welcher Zahl x muss ich ___ potenzieren um die Zahl ___ zu erhalten?
Die Lösung raten wir:	

Übung 3

Gesucht ist:	$\log_{3}81 = x$
Äquivalente Gleichung:	
In Worten:	Mit welcher Zahl x muss ich ___ potenzieren um die Zahl ___ zu erhalten?
Die Lösung raten wir:	

Übung 4

Gesucht ist:	$\log_{0.5} 0.25 = x$
Äquivalente Gleichung:	
In Worten:	Mit welcher Zahl x muss ich ___ potenzieren um die Zahl ___ zu erhalten?
Die Lösung raten wir:	

Lösung 1

Gesucht ist:	$\log_{10}100 = x$
Äquivalente Gleichung:	$10^x = 100$
In Worten:	Mit welcher Zahl x muss ich 10 potenzieren um die Zahl 100 zu erhalten?
Die Lösung raten wir:	$x = 2$

Lösung 2

Gesucht ist:	$\log_{2}32 = x$
Äquivalente Gleichung:	$2^x = 32$
In Worten:	Mit welcher Zahl x muss ich 2 potenzieren um die Zahl 32 zu erhalten?
Die Lösung raten wir:	$x = 5$

Lösung 3

Gesucht ist:	$\log_{3}81 = x$
Äquivalente Gleichung:	$3^x = 81$
In Worten:	Mit welcher Zahl x muss ich 3 potenzieren um die Zahl 81 zu erhalten.
Die Lösung raten wir:	$x = ?$

Lösung 4

Gesucht ist:	$\log_{0.5}0.25 = x$
Äquivalente Gleichung:	$0.5^x = 0.25$
In Worten:	Mit welcher Zahl x muss ich 0.5 potenzieren um die Zahl 0.25 zu erhalten?
Die Lösung raten wir:	$x = 2$

Das Logarithmieren und Potenzieren heben sich auf:

Beispiel:

$$2^{\log_2 100} = 100$$

Erklärung:
Die Definition des Logarithmus lautet:

$$b^a = c \quad \Leftrightarrow \quad \log_b c = a$$

Ersetzen wir a auf der linken Seite durch die rechte Gleichung, so erhalten wir:

$$b^{\log_b c} = c$$

Das Logarithmieren und potenzieren zur gleichen Basis b heben sich also gegenseitig auf.

Sonderfälle:

$$\log_b(1) = 0$$

Erklärung:
Es ist $\log_b(1) = 0$, denn es gilt:

$$\log_b(1) = x \quad \Leftrightarrow \quad b^x = 1$$

Logarithmus einer Potenz:
(1. Logarithmusgesetz):

Eine Potenz wird logarithmiert, indem der Exponent mit dem Logarithmus der Basis multipliziert wird:

$$\boxed{log_b\left(c^n\right) = n \cdot log_b c}$$

$\underline{mit:}$ $b, c \in \mathbb{R}_{>0}$ $b \neq 1$ $n \in \mathbb{R}$

Beispiel:

$$log_3\left(9^{25}\right) = 25 \cdot log_3 9 = 25 \cdot 2 = 50$$

Logarithmus eines Produktes:
(2. Logarithmusgesetz):

Ein Produkt wird logarithmiert, indem die Logarithmen der einzelnen Faktoren addiert werden:

$$\boxed{log_b(u \cdot v) = log_b(u) + log_b(v)}$$

<u>mit:</u> $u, v \in \mathbb{R}_{>0} \quad b \in \mathbb{R}_{>0} \quad b \neq 1$

Beispiele:

$\log_2(4 \cdot 8) = \log_2(4) + \log_2(8) = 2 + 3 = 5$

$\log_2(16 \cdot 32) = \log_2(16) + \log_2(32) = 4 + 5 = 9$

Logarithmus eines Quotienten:
(2. Logarithmusgesetz):

Ein Quotient wird logarithmiert, indem vom Logarithmus des Zählers der Logarithmus des Nenners subtrahiert wird:

$$\boxed{log_b\left(\frac{u}{v}\right) = log_b(u) - log_b(v)}$$

<u>mit:</u> $u, v \in \mathbb{R}_{>0} \quad b \in \mathbb{R}_{>0} \quad b \neq 1$

Beispiel:

$$log_3\left(\frac{81}{9}\right) = log_3 81 - log_3 9 = 4 - 2 = 2$$

Der Basiswechselsatz:

Damit können wir endlich Logarithmen mit dem TR berechnen!

Wenn ein Logarithmus zur Basis a nicht bekannt ist, kann man ihn mit dem Basiswechselsatz in den Quotienten zweier Logarithmen zur Basis b umwandeln:

$$\boxed{\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}}$$

mit: $a,b,c \in \mathbb{R}_{>0} \qquad a,b \neq 1$

Beispiel:

$$\log_2(16) = \frac{\log_4(16)}{\log_4(2)} = \frac{2}{0,5} = 4$$

Mit dem TR:

Wir möchten $\log_3(107)$ berechnen. Da wir keine $\log_3-$Funktion haben, müssen wir die Berechnung mit einer anderen Basis durchführen. Es stehen auf den Rechnern der Zehner-Logarithmus und/oder der 'logarithmus naturalis' zur Verfügung.
Es gibt Rechner, die habe beide Funktionen, den 'ln' und den 'log'; andere jedoch nur den 'ln'. (Der $\log_{10}$ wird mit $\log$ abgekürzt).

Der 10er-Logarithmus hat die Basis 10

Der logarithmus naturalis hat die Basis e = 2,718281828…

Diese 'krumme' Basis ist nach dem berühmten Mathematiker Leonhard Euler benannt und hat eine grosse Bedeutung in der höheren Mathematik. Das soll Sie nicht stören, der TR kann damit genau so gut rechnen wie mit der 'nicht krummen' Zahl 10.

Also: $\log_3(107) = \frac{\ln(107)}{\ln(3)} = \frac{\log(107)}{\log(3)} \approx 4,2534;\ \text{Test}:\ 3^{4,2534} \approx 107,0009$

Beweis des Basiswechselsatzes:

Wir schreiben zweimal den Logarithmus von c auf, und zwar einmal zur Basis a und einmal zur Basis b:

$$\left.\boxed{\begin{array}{lcl} \log_a c = x & \Leftrightarrow & a^x = c \\ \log_b c = y & \Leftrightarrow & b^y = c \end{array}}\right\} \text{❶}$$

Nun machen wir den Ansatz:

$$\boxed{c = c}$$

Wegen den Gleichungen ❶ gilt:

$$\boxed{a^x = b^y}$$

Laut Gleichung ❶ dürfen wir außerdem x durch $\log_a c$ und y durch $\log_b c = y$ ersetzen:

$$\boxed{a^{\log_a c} = b^{\log_b c}}$$

Nun bilden wir den auf beiden Seiten den Logarithmus zur Basis b (wenn die Zahlen gleich sind, sind es auch die Logarithmen):

$$\boxed{\log_b\left(a^{\log_a c}\right) = \log_b\left(b^{\log_b c}\right)}$$

Nun wenden wir das 3. Logarithmusgesetz an (Gesetz über Logarithmus einer Potenz):

$$\boxed{\log_a c \bullet \log_b a = \log_b c \bullet \log_b b}$$

Weil $\log_b b = 1$ dürfen wir schreiben:

$$\boxed{\log_a c \bullet \log_b a = \log_b c}$$

Gleichung durch $\log_b a$ teilen ergibt:

$$\boxed{\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}}$$

Dies ist nun der zu beweisende Satz.

Zusammenfassung / Gegenüberstellung Potenzgesetze und Logarithmengesetze:

Potenzgesetze:

$(a^b)^c = a^{b \cdot c}$ (hoch) Potenz einer Potenz

⇔ (mal) Exponenten multiplizieren

$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$ (mal) Produkt von Potenzen $\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$

⇔ (plus) Exponenten addieren

$a^b + a^c =$  (plus) Summe von Potenzen

⇔ (nichts) keine Exponentenregel

Nur für Potenzen: (verschiedene Basen)

$a^c \cdot b^c = (a \cdot b)^c$

$\frac{a^c}{b^c} \cdot = \left(\frac{a}{b}\right)^c$

Logarithmengesetze:

$\log_b(a^c) = c \cdot \log_b a$ (hoch) Log einer Potenz

⇔ (mal) Exponent mal Log

$\log_b(a \cdot c) = \log_b a + \log_b c$ (mal) Log eines Produktes $\log_b\left(\frac{a}{c}\right) = \log_b a + \log_b c$

⇔ (plus) Logarithmen addieren

$\log_b(a + c) =$  (plus) Log einer Summe

⇔ (nichts) keine Logarithmusregel

Nur für Logarithmen: (Basiswechselsatz)

$\log_b(c) = \frac{\ln(c)}{\ln(a)}$

Häufige Fehler:

→ **$(\log_b c)^n$ geht nicht**!

Aber (siehe 1. Logarithmusgesetz):
Es gibt ein Logarithmusgesetz für den Logarithmus einer Potenz, aber nicht für die Potenz eines Logarithmus

→ **$\log_b(u+v)$ geht nicht!**

Aber (siehe 2. Logarithmusgesetz):
Es gibt ein Logarithmusgesetz für die Summe von Logarithmen (sofern sie dieselbe Basis haben), aber nicht für den Logarithmus einer Summe:

1a Kapitalvermehrung – Zinseszinsrechnung (1)

Ein Kapital von 5'000 Fr. wird zu 3% verzinst.
Welches Kapital kann man auf der Bank nach 11 Jahren abholen wenn man nie Einlagen und Rückzüge getätigt hat?

$K_{11} = 5'000\,\text{Fr.} \cdot 1{,}03^{11} \approx 6'921\,\text{Fr.}$ **K_{11} = 6'921 Fr.** → Potenzrechnung

1b Kapitalvermehrung – Zinseszinsrechnung (2)

Ein Kapital von 5'000 Fr. ist nach 11 Jahren auf 6'921 Fr. angewachsen.
Zu wie viel Prozent wurde es angelegt?

$$K_{11} = 5'000\,\text{Fr.} \cdot x^{11} = 6'921\,\text{Fr.}$$

$$x^{11} = \frac{6'921}{5'000}$$

$$x = \sqrt[11]{\frac{6'921}{5'000}} = \left(\frac{6'921}{5'000}\right)^{\frac{1}{11}} \approx 1{,}0299977$$

p = 3% → Wurzelrechnung

1c Kapitalvermehrung – Zinseszinsrechnung (3)

Ein Kapital von 5'000 Fr. wird zu 3% verzinst.
Nach wie vielen Jahren ist es auf 6'921 Fr. angewachsen?

$$K_x = 5'000\,\text{Fr.} \cdot 1{,}03^x = 6'921\,\text{Fr.} \qquad | \cdot 5'000\,\text{Fr.}$$

$$1{,}03^x = \frac{6'921}{5'000} \qquad |\ \text{auf beiden Seiten logarithmieren (log oder ln)}$$

$$\log\left(1{,}03^x\right) = \log\left(\frac{6'921}{5'000}\right) \qquad |\ \text{TU: rechts Log-Gesetz 1 (Log einer Potenz) anwenden}$$

$$x \cdot \log(1{,}03) = \log\left(\frac{6'921}{5'000}\right) \qquad |\ : \log(1{,}03)$$

$$x = \frac{\log\left(\frac{6'921}{5'000}\right)}{\log(1{,}03)} = 10.9991722$$

x = 11 Jahre → Logarithmusrechnung

Diese Rechnung ist unser Musterbeispiel für exponentielles Wachstum – die Variable x befindet sich im Exponenten.

1. Bevölkerungswachstum
   Eine Stadt hat heute 100'000 Einwohner. Der zukünftige jährliche Zuwachs wird auf 2% geschätzt. Wie viele Einwohner wird diese Stadt in 20 Jahren haben?

   $100'000 \cdot 1{,}02^{20} \approx 148'595$ Sie wird etwa 148'595 Einwohner haben.

2. Bevölkerungswachstum
   Eine Stadt hatte vor 20 Jahren 100'000 Einwohner, heute sind es 187'800 Einwohner. Wie gross war der durchschnittliche jährliche Zuwachs?

$$100'000 \cdot b^{20} = 187'800$$
$$b^{20} = \frac{187'800}{100'000} = 1{,}878$$
$$b = \sqrt[20]{1{,}878} = (1{,}878)^{\frac{1}{20}} \approx 1{,}032$$

   Der jährliche Zuwachs beträgt ca. 3,2%

3. Bevölkerungswachstum
   Eine Stadt hat heute q Einwohner. Der jährliche Zuwachs wird auf 2,5% geschätzt. Wann wird sich die Einwohnerzahl verdoppelt haben?

$$q \cdot 1{,}025^{x} = 2 \cdot q$$
$$1{,}025^{x} = 2$$
$$x \cdot \ln(1{,}025) = \ln(2)$$
$$x = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}025)} = 28{,}1$$

   In gut 28 Jahren wird die Stadt doppelt so viele Einwohner haben.

4. Bevölkerungswachstum - Bestimmung zweier Grössen
   Eine Stadt hatte 1890 eine Einwohnerzahl von 157'867 und 1920 eine von 210'899. Wie viele Einwohner hat sie heute (2007) und was war die durchschnittliche jährliche Zuwachsrate?

   Berechnung der Zuwachsrate:

$$157'867 \cdot b^{30} = 210'899$$
$$b^{30} = \frac{210'899}{157'867}$$
$$b = \left(\frac{210'899}{157'867}\right)^{\frac{1}{30}} = 1{,}009701$$

   Die Zuwachsrate betrug 0,9701%

Berechnung der heutigen Einwohnerzahl:

$210'899 \cdot 1{,}009701^{87} \approx 488'480$ oder
$157'867 \cdot 1{,}009701^{117} \approx 488'481$

Die heutige Einwohnerzahl ist ca. 488'480

Beachten Sie die Rundungsdifferenz von 1, obwohl wir die Zuwachsrate auf 6(!) Stellen genau eingesetzt haben.
Würden wir die Zuwachsrate auf 1% runden, erhielten wir folgende Zahlen:

$210'899 \cdot 1{,}01^{87} \approx 501'227$ oder
$157'867 \cdot 1{,}01^{117} \approx 505'699$ das sind immerhin fast 20'000 mehr.

5. Lichtmenge in trübem Gewässer
In einem Gewässer nimmt die Menge Licht mit jedem Meter um 10% ab.
In welcher Tiefe ist nur noch ein Viertel des Lichtes an der Oberfläche vorhanden?

$$L \cdot (1-0{,}1)^x = L \cdot 0{,}9^x = 0{,}25 \cdot L$$
$$0{,}9^x = 0{,}25$$
$$x \cdot \ln(0{,}9) = \ln(0{,}25)$$
$$x = \frac{\ln(0{,}25)}{\ln(0{,}9)} \approx 13{,}2\ \text{m}$$

6. Jährliche Spesen
Eine Bank zieht jährlich 1% des Wertschriftendepots als Verwaltungsgebühren ab. Seit der Depoteröffnung erwirtschaftete dieser Kunde durch Aktienkäufe und -verkäufe einen Vermögenszuwachs von jährlich 0,7%.
Bis heute hat der Kunde 10% seines Vermögens verloren. Vor wie vielen Jahren hat er das Depot eröffnet?

Der jährliche Verlust betrug 0,3%.

$$K \cdot (1-0{,}003)^x = K \cdot 0{,}997^x = 0{,}9 \cdot K$$
$$0{,}997^x = 0{,}9$$
$$x \cdot \ln(0{,}997) = \ln(0{,}9)$$
$$x = \frac{\ln(0{,}9)}{\ln(0{,}997)} = 35{,}07$$
Der Kunde hat das Depot vor rund 35 Jahren eröffnet.

1. Bevölkerungswachstum
Eine Stadt hat heute 100'000 Einwohner. Der zukünftige jährliche Zuwachs wird auf 2% geschätzt. Wie viele Einwohner wird diese Stadt in 20 Jahren haben?

$100'000 \cdot 1{,}02^{20} \approx 148'595$ Sie wird etwa 148'595 Einwohner haben.

2. Bevölkerungswachstum
Eine Stadt hatte vor 20 Jahren 100'000 Einwohner, heute sind es 187'800 Einwohner. Wie gross war der durchschnittliche jährliche Zuwachs?

$$100'000 \cdot b^{20} = 187'800$$
$$b^{20} = \frac{187'800}{100'000} = 1{,}878$$
$$b = \sqrt[20]{1{,}878} = (1{,}878)^{\frac{1}{20}} \approx 1{,}032$$

Der jährliche Zuwachs beträgt ca. 3,2%

3. Bevölkerungswachstum
Eine Stadt hat heute q Einwohner. Der jährliche Zuwachs wird auf 2,5% geschätzt. Wann wird sich die Einwohnerzahl verdoppelt haben?

$$q \cdot 1{,}025^{x} = 2 \cdot q$$
$$1{,}025^{x} = 2$$
$$x \cdot \ln(1{,}025) = \ln(2)$$
$$x = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}025)} = 28{,}1$$

In gut 28 Jahren wird die Stadt doppelt so viele Einwohner haben.

4. Bevölkerungswachstum - Bestimmung zweier Grössen
Eine Stadt hatte 1890 eine Einwohnerzahl von 157'867 und 1920 eine von 210'899. Wie viele Einwohner hat sie heute (2007) und was war die durchschnittliche jährliche Zuwachsrate?

Berechnung der Zuwachsrate:

$$157'867 \cdot b^{30} = 210'899$$
$$b^{30} = \frac{210'899}{157'867}$$
$$b = \left(\frac{210'899}{157'867}\right)^{\frac{1}{30}} = 1{,}009701$$

Die Zuwachsrate betrug 0,9701%

Berechnung der heutigen Einwohnerzahl:

$210'899 \cdot 1{,}009701^{87} \approx 488'480$ oder
$157'867 \cdot 1{,}009701^{117} \approx 488'481$

Die heutige Einwohnerzahl ist ca. 488'480

Beachten Sie die Rundungsdifferenz von 1, obwohl wir die Zuwachsrate auf 6(!) Stellen genau eingesetzt haben.
Würden wir die Zuwachsrate auf 1% runden, erhielten wir folgende Zahlen:

$210'899 \cdot 1{,}01^{87} \approx 501'227$ oder
$157'867 \cdot 1{,}01^{117} \approx 505'699$ das sind immerhin fast 20'000 mehr.

5. Lichtmenge in trübem Gewässer
In einem Gewässer nimmt die Menge Licht mit jedem Meter um 10% ab.
In welcher Tiefe ist nur noch ein Viertel des Lichtes an der Oberfläche vorhanden?

$$L \cdot (1-0{,}1)^x = L \cdot 0{,}9^x = 0{,}25 \cdot L$$
$$0{,}9^x = 0{,}25$$
$$x \cdot \ln(0{,}9) = \ln(0{,}25)$$
$$x = \frac{\ln(0{,}25)}{\ln(0{,}9)} \approx 13{,}2\text{ m}$$

6. Jährliche Spesen
Eine Bank zieht jährlich 1% des Wertschriftendepots als Verwaltungsgebühren ab.
Seit der Depoteröffnung erwirtschaftete dieser Kunde durch Aktienkäufe und -verkäufe einen Vermögenszuwachs von jährlich 0,7%.
Bis heute hat der Kunde 10% seines Vermögens verloren. Vor wie vielen Jahren hat er das Depot eröffnet?

Der jährliche Verlust betrug 0,3%.

$$K \cdot (1-0{,}003)^x = K \cdot 0{,}997^x = 0{,}9 \cdot K$$
$$0{,}997^x = 0{,}9$$
$$x \cdot \ln(0{,}997) = \ln(0{,}9)$$
$$x = \frac{\ln(0{,}9)}{\ln(0{,}997)} = 35{,}07$$

Der Kunde hat das Depot vor rund 35 Jahren eröffnet