

Die Lösungsformel der allgemeinen quadratischen Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ lautet: } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(Die folgenden Aufgaben sind aus Deller/Gebauer/Zinn Algebra Aufgaben 2, Seiten 4-7)

11 Quadratische Gleichungen

Die Auflösungsformel für die allgemeine quadratische Gleichung

Allgemeine quadratische Gleichung (Gleichung zweiten Grades) in x :
 $ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$

Dabei heisst ax^2 das *quadratische*, bx das *lineare* und c das *konstante* Glied. $b^2 - 4ac$ heisst die *Diskriminante*¹ und wird mit D bezeichnet.

$$\text{Auflösungsformel: } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \quad (D = b^2 - 4ac \geq 0)$$

Die Anzahl der Lösungen hängt von der Diskriminante ab:

$$D > 0 \rightarrow \text{Zwei Lösungen: } x_1 \neq x_2$$

$$D = 0 \rightarrow \text{Eine Lösung: } x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} \quad (\text{so genannte Doppellösung})$$

$$D < 0 \rightarrow \text{Keine Lösung.}$$

Zu 35–52: Wende die Auflösungsformel an.
(Beispiele mit Diskriminante 0: Nr. 44b, 48a.
Beispiel mit negativer Diskriminante: Nr. 39b)

- 35 a) $2x^2 - 7x + 3 = 0$ b) $4x^2 + 5x - 6 = 0$
- 36 a) $3x^2 + 8x + 5 = 0$ b) $2x^2 - x - 6 = 0$
- 37 a) $x^2 + 3x - 5 = 0$ b) $4x^2 - x - 2 = 0$
- 38 a) $x^2 - 6x + 4 = 0$ b) $-x^2 + 2x + 1 = 0$
- 39 a) $5x^2 + 8x = 4$ b) $5x^2 - 8x + 4 = 0$
- 40 a) $16 - 50x + 25x^2 = 0$ b) $1125 + 20x - x^2 = 0$
- 41 a) $360x^2 - x - 0.25 = 0$ b) $x^2 + 4x - 2.25 = 0$
- 42 a) $9y^2 + 9y + 0.25 = 0$ b) $2.5z^2 - 3z + 0.2 = 0$
- 43 a) $12u^2 + 13u - 14 = 0$ b) $4v^2 - 4v - 7 = 0$

¹ Lat. discriminare "trennen".

11.1 Auflösen quadratischer Gleichungen

- 44 a) $x^2 - 17x - 1650 = 0$ b) $-x^2 + 70x - 1225 = 0$
- 45 a) $20x^2 - 41x + 20 = 0$ b) $24x^2 - 65x + 44 = 0$
- 46 a) $100x^2 - 520x + 651 = 0$ b) $112x^2 + 111x - 100 = 0$
- 47 a) $x^2 - 8\sqrt{3}x + 36 = 0$ b) $\sqrt{2}x^2 + x - \sqrt{2} = 0$
- 48 a) $2x^2 - \sqrt{2}x + 0.25 = 0$ b) $(1 + \sqrt{3})x^2 + x + (1 - \sqrt{3}) = 0$
- 49 a) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{6} = 0$ b) $\frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{2} = 0$
- 50 a) $\frac{x^2}{15} + \frac{7x}{5} - 36 = 0$ b) $\frac{x^2}{25} - \frac{x}{6} + \frac{1}{9} = 0$
- 51 a) $77x^2 + 11x - 66 = 0$ b) $-9x^2 - 54x - 63 = 0$
- 52 a) $0.5x^2 - 2.3x + 1.2 = 0$ b) $1.05x^2 - 1.75x + 0.7 = 0$

Zu 53, 54: Wie viele Elemente hat die Lösungsmenge?

- 53 a) $x^2 + 100x + 1 = 0$ b) $2x^2 - x + 3 = 0$
 c) $0.3x^2 - 2.4x + 4.8 = 0$ d) $4x^2 + 12x + 9 = 0$
 e) $16x^2 + 25x + 10 = 0$ f) $6x^2 - 19x + 15 = 0$
- 54 Wie die vorhergehende Aufgabe, wobei in jeder Gleichung das konstante Glied durch das entgegengesetzte zu ersetzen ist.

Zu 55–64: Die Verwendung der Auflösungsformel ist nicht der einfachste Lösungsweg.

- 55 a) $x^2 - 3x = 0$ b) $4x^2 + 5x = 0$ c) $x - 7x^2 = 0$
- 56 a) $\frac{5}{6}x^2 + \frac{15}{4}x = 0$ b) $-1.6x^2 + 1.2x = 0$ c) $ax^2 + bx = 0$ ($a \neq 0$)
- 57 a) $5.6x^2 - 7x = 0$ b) $x^2 = 9x$ c) $\sqrt{3}x^2 + 6x = 0$
- 58 a) $y^2 = y$ b) $\frac{2}{3}z^2 + \frac{3}{2}z = 0$ c) $10w - \sqrt{2}w^2 = 0$
- 59 a) $x^2 - 27 = 0$ b) $2x^2 - 84.5 = 0$ c) $9x^2 + 4 = 0$
- 60 a) $4x^2 - 289 = 0$ b) $0.5x^2 - 0.3 = 0$ c) $ax^2 + c = 0$ ($a \neq 0$)

11 Quadratische Gleichungen

- 61 a) $(x + 2)(x + 5) = 0$ b) $x^2 - 8x + 15 = 0$
- 62 a) $x^2 - 4x - 21 = 0$ b) $x^2 + 12x - 28 = 0$
- 63 a) $x^2 + 2x = 24$ b) $x^2 - 3x = 40$
- 64 a) $x^2 - 14x = -49$ b) $x^2 + 13x = -36$
- 65 Löse die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ für $p = 80 + 2 \cdot 10^{-10}$, $q = (40 + 10^{-10})^2$ einerseits genau und andererseits mit Hilfe eines Taschenrechners. (Manche Rechner liefern – unzutreffenderweise – einen negativen Diskriminantenwert.)
- 66 Löse die Gleichung $x^2 + 2x \cos \alpha + 1 = 0$ für $\alpha = 10^{-6}$ Grad einerseits genau und andererseits mit Hilfe eines Taschenrechners.

Zu 67–72: Die Gleichung ist zuerst so umzuformen, dass sie klammerfrei und nennerfrei ist.

- 67 a) $9(x - 10) - x(x - 15) = x$ b) $3(x^2 + 2) - x(x + 9) = 11$
- 68 a) $\frac{2x + 1}{3} - \frac{x^2 + x - 1}{5} = 1 - x$ b) $\frac{3}{4}(x^2 - 2) - \frac{1}{2}(x - 3) = \frac{5}{6}(x^2 - x)$
- 69 a) $y^3 + 19 = (y + 4)^3$ b) $(5 + z)(5 - z) = (z + 3)^2 - (z - 4)^2$
- 70 a) $x^2 + \left(x + \frac{1}{6}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{3}\right)^2$ b) $\left(\frac{x - 5}{6}\right)^2 + \left(\frac{x - 2}{3}\right)^2 = \left(\frac{x - 1}{2}\right)^2$
- 71 $\left(q + \frac{1}{3}\right)^3 - \left(q - \frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{1}{3} + q\right)\left(\frac{1}{3} - q\right)$
- 72 a) $x^3 = (x + 3)(x - 4)(x + 6)$ b) $(t - 6)^3 = (t - 2)(t + 3)(t + 30)$

Zu 73–76: Löse die Klammern nur auf, wenn dies zweckmässig ist.

- 73 a) $(x - 8)(5x - 9) = 0$ b) $(3x - 2)(4x + 1) = 0$
c) $(x - 3)(2x - 7) = 1$ d) $(x^2 - 5)(x + 6) = 0$
- 74 a) $(x - 2)(x^2 + 18) = x^3$ b) $(x^2 - 8x + 10)(7x - 1) = 0$
- 75 a) $x(x^2 - 4x) = 6(x^2 - 4x)$ b) $(5x - 44)(x - 99) = x - 99$
- 76 a) $(2x + 1)(3x + 4) = 0$ b) $(2x + 1)(3x + 4) = 1$
c) $(2x + 1)(3x + 4) = 3x + 4$ d) $(2x + 1)(3x + 4) = x$

