Die **allgemeine quadratische Gleichung** (auch gemischtquadratische Gleichung genannt), lässt sich immer auf die folgende Form bringen:

→ $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \neq 0$

Mit den bekannten Mitteln der Äquivalenzumformungen kommen wir nicht zum Ziel. Mit der Methode des quadratischen Ergänzens – welche wir von den quadratischen Funktionen her kennen - jedoch wohl:

$$
\begin{array}{lcll}
ax^2 + bx + c & = & 0 & |\ :a \\
x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} & = & 0 & |\ \text{qE} \\
x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 & = & 0 & |\ \text{TU} \\
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 & = & 0 & |\ -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 & = & -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 & |\ \text{TU} \\
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 & = & -\frac{4ac}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2} & |\ \text{TU} \\
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 & = & +\frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2} & |\ \text{TU} \\
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 & = & +\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} & |\ \sqrt{\ } \\
x + \frac{b}{2a} & = & \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} & |\ -\frac{b}{2a} \\
x & = & -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} & |\ \text{TU} \\
x & = & -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} & |\ \text{TU} \\
x & = & \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} &
\end{array}
$$

Die Lösungsformel der allgemeinen quadratischen Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0$$

lautet also:

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Die Diskussion der Lösungsformel $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$:

1. Im Nenner steht 2a; daran erkennen wir wieder, dass a nie gleich Null sein darf. Wir sehen es der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ an, dass bei $a = 0$ eine lineare Gleichung entstehen würde.

2. a) $b^2 - 4ac$ darf nicht negativ sein; aus negativen Zahlen kann man keine Wurzel ziehen; d.h. die Gleichung hat keine Lösung(en).
   b) ist $b^2 - 4ac = 0$ so fällt der ganze Wurzelterm weg und die beiden Lösungen fallen zusammen: $x_1 = \frac{-b}{2a}$; d.h. die Gleichung hat genau eine Lösung.
   c) ist $b^2 - 4ac > 0$ so hat die Gleichungen zwei verschiedene Lösungen.

Da nun der Term $b^2 - 4ac$ über die Anzahl der Lösungen entscheidet, hat er auch einen eigenen Namen bekommen; man nennt $b^2 - 4ac$ die **Diskriminante**: D = $b^2 - 4ac$

Man kann also sagen:

1.	Diskriminante	$D < 0$	Die Gleichung hat keine Lösung(en)
2.	Diskriminante	$D = 0$	Die Gleichung hat eine Lösung
3.	Diskriminante	$D > 0$	Die Gleichung hat zwei (verschiedene) Lösungen

Beispiele:

Berechnen Sie die Diskriminante und entscheiden Sie über die Anzahl der Lösungen:

1. $-2x^2 + 4x - 2 = 0$

2. $-2x^2 + 4x - 3 = 0$

3. $x^2 + 4x - 2 = 0$

Lösungen:

Die Diskussion der Lösungsformel $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$:

1. Im Nenner steht 2a; daran erkennen wir wieder, dass a nie gleich Null sein darf. Wir sehen es der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ an, dass bei $a = 0$ eine lineare Gleichung entstehen würde.

2. a) $b^2 - 4ac$ darf nicht negativ sein; aus negativen Zahlen kann man keine Wurzel ziehen; d.h. die Gleichung hat keine Lösung(en).
b) ist $b^2 - 4ac = 0$ so fällt der ganze Wurzelterm weg und die beiden Lösungen fallen zusammen: $x_1 = \frac{-b}{2a}$; d.h. die Gleichung hat genau eine Lösung.
c) ist $b^2 - 4ac > 0$ so hat die Gleichungen zwei verschiedene Lösungen.

Da nun der Term $b^2 - 4ac$ über die Anzahl der Lösungen entscheidet, hat er auch einen eigenen Namen bekommen; man nennt $b^2 - 4ac$ die Diskriminante: D = $b^2 - 4ac$

Man kann also sagen:

1.	Diskriminante	$D < 0$	Die Gleichung hat keine Lösung(en)
2.	Diskriminante	$D = 0$	Die Gleichung hat eine Lösung
3.	Diskriminante	$D > 0$	Die Gleichung hat zwei (verschiedene) Lösungen

Beispiele:
Berechnen Sie die Diskriminante und entscheiden Sie über die Anzahl der Lösungen:

1. $-2x^2 + 4x - 2 = 0$
$D = b^2 - 4ac$ $\quad D = 4^2 - 4(-2)\cdot(-2)$ $\quad D = 0$
Diese Gleichung hat genau eine Lösung.

2. $-2x^2 + 4x - 3 = 0$
$D = b^2 - 4ac$ $\quad D = 4^2 - 4(-2)\cdot(-3)$ $\quad D = -8$
Diese Gleichung hat keine Lösung(en).

3. $x^2 + 4x - 2 = 0$
$D = b^2 - 4ac$ $\quad D = 4^2 - 4\cdot 1\cdot(-2)$ $\quad D = 24$
Diese Gleichung hat zwei Lösungen.