Systematik der quadratischen Gleichungen und Spezialfälle:

Die **allgemeine quadratische Gleichung** (auch gemischtquadratische Gleichung genannt), lässt sich immer auf die folgende Form bringen:

→ $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \neq 0$

Ein Spezialfall ist die **reinquadratische Gleichung** $ax^2 + c = 0$ (sie enthält kein lineares Glied in x) und lässt sich immer auf folgende direkt lösbare Form bringen:

→ $x^2 = d$ mit $a \neq 0$ und $d = -\frac{c}{a}$

Beispiel: $5x^2 - 20 = 0$ → $x^2 = 4$

Die Lösungen dieser Gleichung sind (sofern d nicht negativ ist):

$x_1 = \sqrt{d}$ und $x_2 = -\sqrt{d}$ oder mit den Koeffizienten geschrieben:

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}} \text{ und } x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

(Die folgenden Aufgaben sind aus Deller/Gebauer/Zinn Algebra Aufgaben 2, Seite 1)

1 a) $x^2 = 144$ b) $x^2 = 9.61$ c) $x^2 = 200$

2 a) $x^2 = 0.04$ b) $x^2 = 2\frac{7}{9}$ c) $x^2 = -81$

3 a) $7x^2 = 3703$ b) $0.8x^2 = 24.2$ c) $3x^2 = 8$

4 a) $2x^2 = 9$ b) $0.4x^2 = 10$ c) $12x^2 = 1$

5 a) $8x^2 - 0.5 = 0$ b) $11 - 0.6x^2 = 2$ c) $x^2 + 4 = 0$

6 a) $\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}x^2$ c) $0.5x^2 + 0.4 = 0.3x^2$

7 a) $x^2 - 48 = 99 - 2x^2$ b) $(x+8)(x-8) = 8 - x^2$

8 a) $(17+x)(17-x) = (x+7)(x-7)$ b) $(x^2-9)^2 = x^4 + 9$

9 a) $(z+3)^2 + (z-3)^2 = 50$ b) $(7+n)(7-n) = (3n+2)^2 - (2n+3)^2$

10 a) $5 : a = a : 10$ b) $8 : \frac{b}{2} = b : 9$ c) $\frac{24}{c} = \frac{c}{54}$

11 a) $(3x-8)(x+4) = (x+7)(x-3)$ b) $\frac{x+1}{x+4} + \frac{x-1}{x-4} = 0$

12 a) $\frac{2}{x+2} + \frac{4}{x-6} = \frac{7}{x-4}$ b) $\frac{6}{x^2-3x} - \frac{4}{2x-6} = \frac{2}{3}$

. . . und nun noch eingekleidete Aufgaben, die zu reinquadratischen Gleichungen führen:
(Die folgenden Aufgaben sind aus Deller/Gebauer/Zinn Algebra Aufgaben 2, Seite 2)

13 In einem Trapez mit dem Inhalt $78.4\,\text{cm}^2$ ist eine Parallelseite doppelt, die andere dreimal so lang wie die Höhe, die zu berechnen ist.

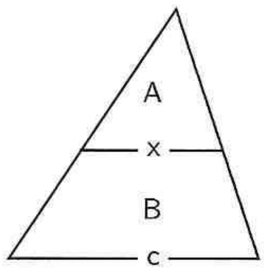
14 In einem Rhombus verhalten sich die Diagonalen wie $3:5$. Wie lang sind sie, wenn der Rhombusinhalt $43.2\,\text{cm}^2$ misst?

15 Berechne den Radius r eines Kreises aus seinem Inhalt A.
a) $A = 5\,\text{m}^2$ b) Allgemein

16 Ein Kreis mit dem gegebenen Radius r soll
a) durch einen konzentrischen Kreis in 2 flächengleiche Teile
b) durch zwei konzentrische Kreise in 3 flächengleiche Teile
zerlegt werden. Berechne die unbekannten Radien.

17 Auf den Schenkeln eines rechten Winkels bewegen sich vom Scheitel aus zwei Punkte mit den konstanten Geschwindigkeiten $5.6\,\text{m/s}$ und $19.2\,\text{m/s}$. Wie viele Sekunden nach dem gemeinsamen Start beträgt ihre Entfernung $37\,\text{m}$?

18 Die Basis c eines Dreiecks misst $30\,\text{cm}$. Eine Parallele x zu c zerlegt das Dreieck in die Teilflächen A und B (vgl. Figur).
Berechne x so, dass sich A zu B verhält wie
a) $1:3$ b) $9:7$ c) $4:5$ d) $1:1$ e) $3:2$



19 Die Kante b eines Quaders ist um $1\,\text{dm}$ länger als Kante a und um $1\,\text{dm}$ kürzer als Kante c. Berechne b, wobei man noch weiss, dass
a) die Quaderoberfläche $35.5\,\text{dm}^2$
b) die Körperdiagonale $49\sqrt{2}\,\text{dm}$ misst.

20 Ein gerades dreiseitiges Prisma hat lauter gleich lange Kanten. Bestimme die Kantenlänge (auf mm genau) so, dass die Prismenoberfläche $10\,\text{m}^2$ misst.

21 Eine quadratische Pyramide hat lauter gleich lange Kanten. Bei doppelter Kantenlänge wäre die Oberfläche um $12\,\text{m}^2$ grösser, als sie ist. Wie lang ist eine Kante (auf mm genau)?

22 Über einem Quadrat mit der Seitenlänge $2\,\text{m}$ wird eine gerade Pyramide errichtet. Berechne ihre Höhe so, dass ihre Oberfläche $9\,\text{m}^2$ misst.

(Die folgenden Aufgaben sind aus Deller/Gebauer/Zinn Algebra Aufgaben 2, Seite 3)

Folgende Gleichungen sind reinquadratisch zu lösen – oder durch quadratisches Ergänzen auf eine reinquadratische Gleichung zu bringen.

Beispiel 25a) $x-5=\pm\sqrt{16}$; $x=5\pm 4$ ergibt $x_1=9 \wedge x_2=1$

Beispiel 26d) (mit qE): $y^2+4y+4-4=21$ (Sie wissen ja: 4y durch 2, durch y)

$(y+2)^2-4=21$; $(y+2)^2=25$ jetzt weiter wie 25a):

$x_1=3 \wedge x_2=-7$

Quadratisches Ergänzen

25 a) $(x-5)^2=16$ b) $x^2+6x+9=49$ c) $(x-6)^2=8$
d) $x^2+8x=65$ e) $x^2-4x-1=0$ f) $2x^2+x-10=0$

26 a) $(y-9)^2=36$ b) $(y+1)^2=2$ c) $y^2-16y+64=0$
d) $y^2+4y=21$ e) $3y^2-4y=4$ f) $y^2-y+1=0$

27 a) $x^2-2x-5=0$ b) $y^2+20y-96=0$ c) $z^2-4z+7=0$

28 a) $r^2+52r+576=0$ b) $s^2-6s+6=0$ c) $t^2-6t+9=0$

29 a) $x^2-0.6x-0.16=0$ b) $x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}=0$

30 a) $x^2-4\sqrt{2}x+6=0$ b) $x^2-5x+5.25=0$

31 a) $n^2+3n-270=0$ b) $2v^2-18v-72=0$

32 a) $a^2-a-600=0$ b) $2p^2-6p+4.5=0$

33 a) $3x^2+x-2=0$ b) $\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{6}x-11=0$

34 a) $5x^2-2x-3=0$ b) $10x^2+8x+1.6=0$

Die **allgemeine quadratische Gleichung** (auch gemischtquadratische Gleichung genannt), lässt sich immer auf die folgende Form bringen:
→ $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \neq 0$

Ein zweiter Spezialfall der allgemeinen quadratischen Gleichung, der einfach zu lösen ist, ist der Fall mit $c = 0$:
→ $ax^2 + bx = 0$ (sie enthält kein konstantes Glied) und lässt sich immer auf folgende, direkt lösbare, Form bringen:
→ $x(x+d) = 0$ mit $d = \frac{b}{a}$ und $a \neq 0$

(Herleitung $ax^2 + bx = 0$ → $x^2 + \frac{b}{a}x = 0$ → $x\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 = 0$)

Beispiel: $x^2 - 4x = 0$ → $x(x-4) = 0$;
Wir wissen:
Ein Produkt ist 0 wenn mindestens ein Faktor 0 ist - d.h. also:
$x = 0$ oder $x - 4 = 0$
und damit sind die beiden Lösungen: $x_1 = 0 \wedge x_2 = 4$
man schreibt für diese Lösungsmenge auch: $\mathbb{L} = \{0, 4\}$

Lösen Sie analog:

(Die folgenden Aufgaben sind aus Deller/Gebauer/Zinn Algebra Aufgaben 2, Seite 5)

55 a) $x^2 - 3x = 0$ b) $4x^2 + 5x = 0$ c) $x - 7x^2 = 0$

56 a) $\frac{5}{6}x^2 + \frac{15}{4}x = 0$ b) $-1.6x^2 + 1.2x = 0$ c) $ax^2 + bx = 0 \quad (a \neq 0)$

57 a) $5.6x^2 - 7x = 0$ b) $x^2 = 9x$ c) $\sqrt{3}x^2 + 6x = 0$

58 a) $y^2 = y$ b) $\frac{2}{3}z^2 + \frac{3}{2}z = 0$ c) $10w - \sqrt{2}w^2 = 0$