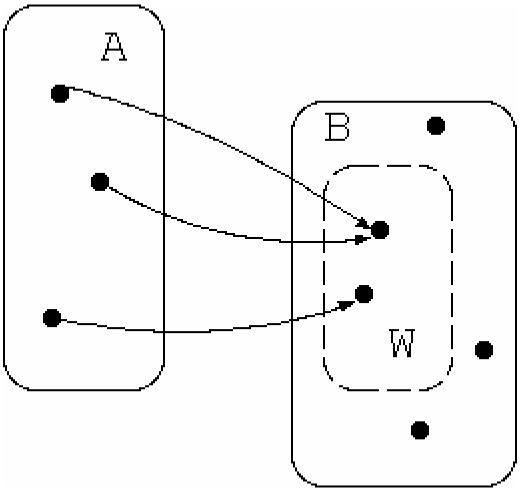
Definition:
Eine **Funktion** ist eine Vorschrift, die *jedem* Element einer Menge A *ein* Element einer Menge B zuordnet

1. Darstellungsform einer Funktion: Das **Pfeildiagramm**:

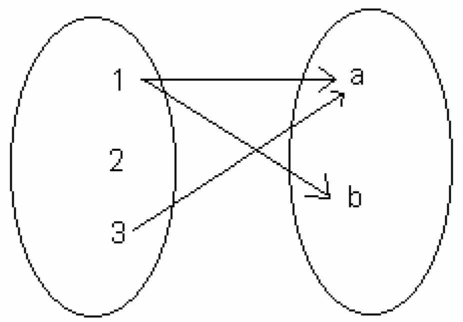


Bezeichnungen:

Man bezeichnet A als **Definitionsmenge** der Funktion; von jedem Element der Definitionsmenge führt ein Pfeil zu einem Element in der Menge B.
Die Gesamtheit der Elemente aus B, die Elementen aus A zugeordnet sind, bezeichnet man als **Wertemenge**.
Dies kann die ganze Menge B sein, muss aber nicht – es kann auch nur eine Teilmenge von B sein, wie hier im Beispiel dargestellt.

Beispiele:

1. Stellt folgendes Pfeildiagramm eine Funktion dar?

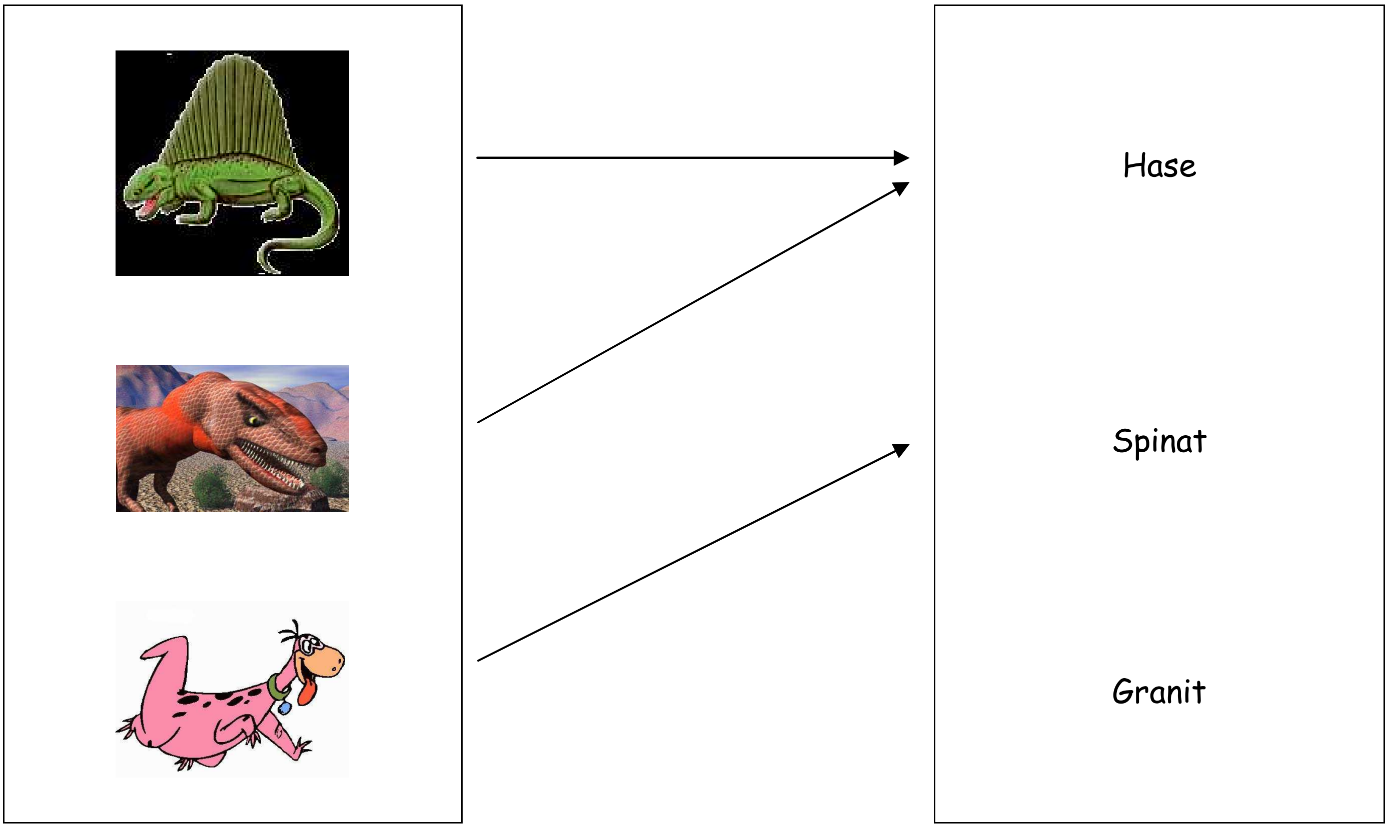


Begründung:

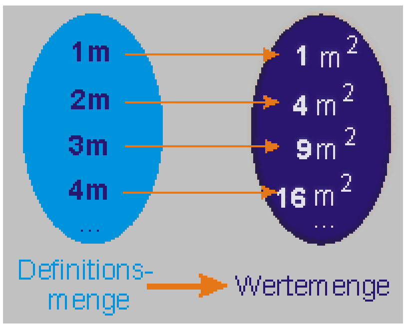
Anmerkung:
Man kann bei Pfeildiagrammen zwischen zwei Mengen die Pfeile beliebig zulassen, dann spricht man von **Relationen**:

Zu obigem Beispiel: 1 = Felix, 2 = Gustav, 3 = Hugo
a = Klavier, b = Geige

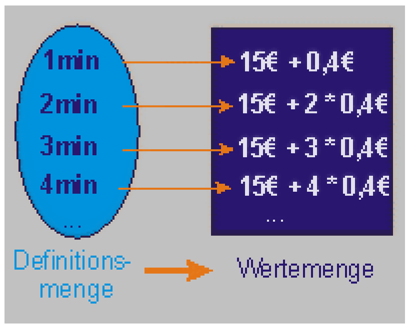
Dann zeigt die Relation "Person x spielt Instrument y":
Felix spielt Klavier und Geige, Hugo spielt Klavier und Gustav ist absolut unmusikalisch.



Das Quadrieren der Grösse aus der Definitionsmenge ergibt die zugeordnete Grösse aus der Wertemenge.



Das Multiplizieren der Masszahl aus der Definitionsmenge mit 0,4 € und die Addition von 15 € ergibt die zugeordnete Grösse aus der Wertemenge.



Wir wollen uns nun speziell denjenigen Funktionen zuwenden, deren Definitions- und Wertebereich Zahlenmengen sind.

Wir geben nochmals die Definition einer Funktion und formulieren sie etwas spezieller für Zahlenmengen:

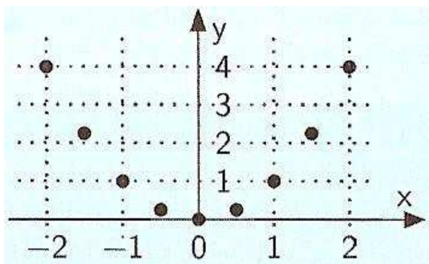
Eine **Funktion** ordnet jeder Zahl x einer Zahlenmenge $\mathbb{D}$ eine Zahl y zu. Die Menge $\mathbb{D}$ heisst **Definitionsmenge** oder **Definitionsbereich**. Die Elemente von $\mathbb{D}$ heissen **Argumente** oder Funktionsstellen (kurz: **Stellen**). Die Variable x, die für die Elemente von $\mathbb{D}$ verwendet wird, heisst **unabhängige Variable**.
Die Menge $\mathbb{W}$ aller zugeordneter Elemente y heisst **Wertemenge** oder **Wertebereich**. Die Elemente von $\mathbb{W}$ heissen Funktionswerte (kurz: **Werte**). Die Variable y, die für die Elemente von $\mathbb{W}$ verwendet wird, heisst **abhängige Variable**.

2. Darstellungsform einer Funktion: Die **Wertetabelle**

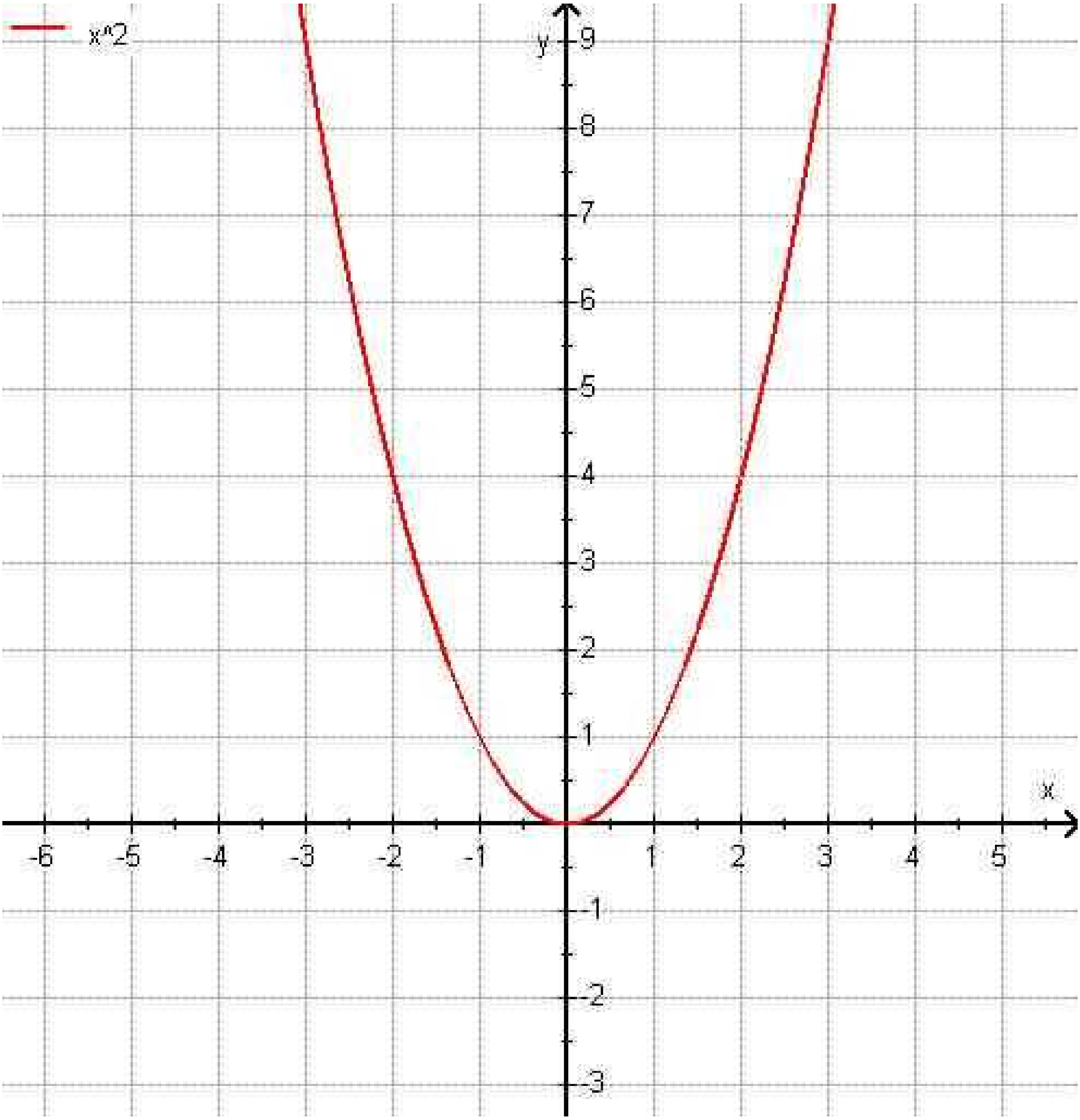
	x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
$f:$	y	4	2.25	1	0.25	0	0.25	1	2.25	4

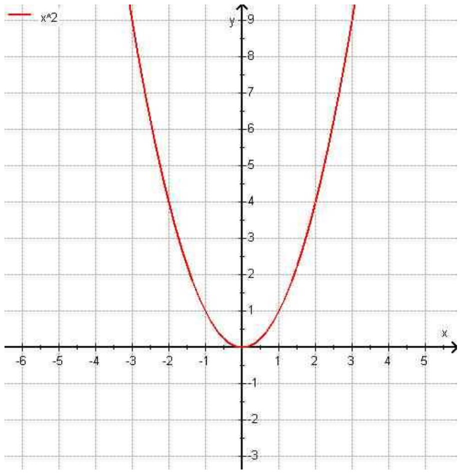
Bei unendlichen Mengen kann man natürlich nur einen Teil tabellarisch darstellen. Die Zuordnung erfolgt durch eine **Zuordnungsvorschrift**. Für die obige Wertetabelle lautet sie: "Ordne jedem Argument sein Quadrat zu".
Man schreibt: $y = x^2$. Man nennt dies die **Funktionsgleichung** und x^2 den **Funktionsterm**.

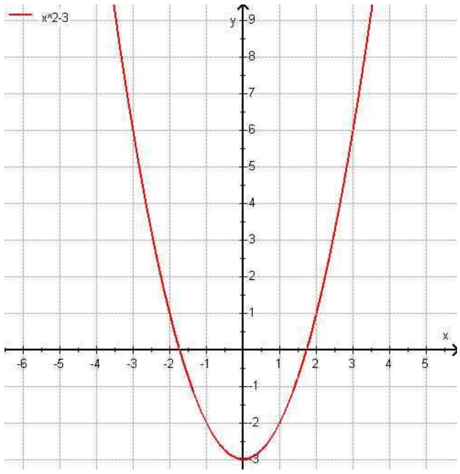
3. Darstellungsform einer Funktion: Der **Graph** im x-/y-Koordinatensystem

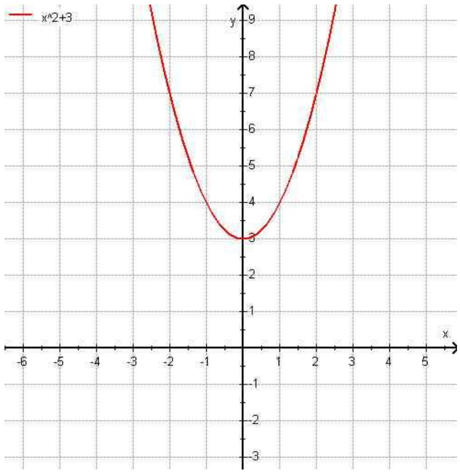


Die Normalparabel:







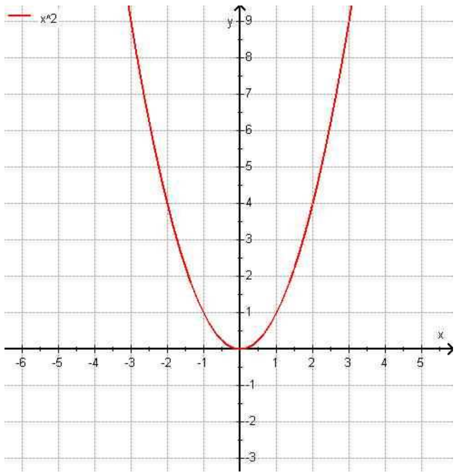


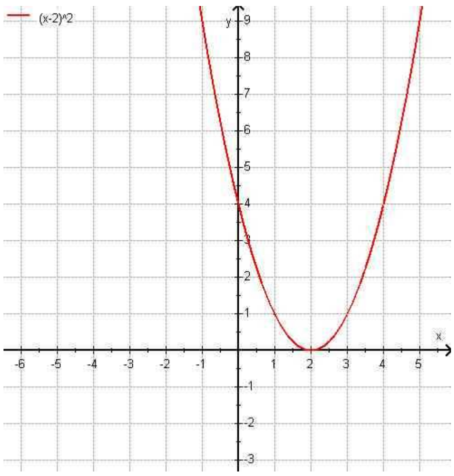
Wir halten fest:

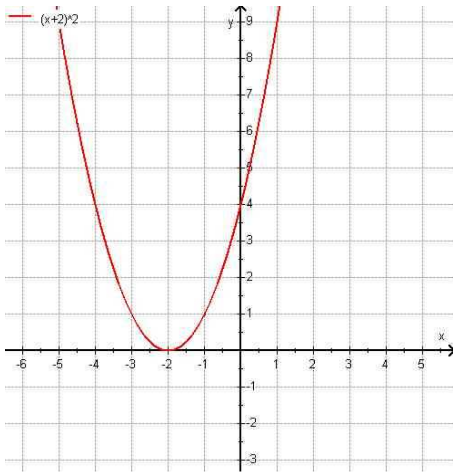
Der Graph von
$y = x^2$
stellt eine nach oben geöffnete Normalparabel dar mit Scheitelpunkt in
S = (0/0)

Der Graph von
$y = x^2-3$ $\quad$ $y = x^2-v$
stellt eine nach oben geöffnete Normalparabel dar mit Scheitelpunkt in
S = (0/-3) $\quad$ S = (0/-v)

Der Graph von
$y = x^2+3$ $\quad$ $y = x^2+v$
stellt eine nach oben geöffnete Normalparabel dar mit Scheitelpunkt in
S = (0/3) $\quad$ S = (0/v)





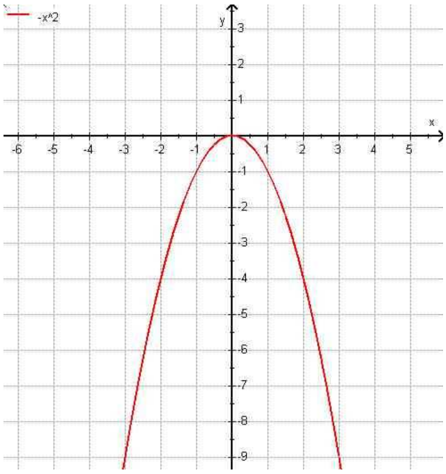


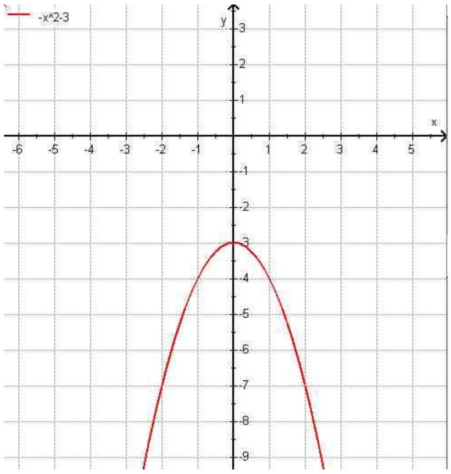
Wir halten fest:

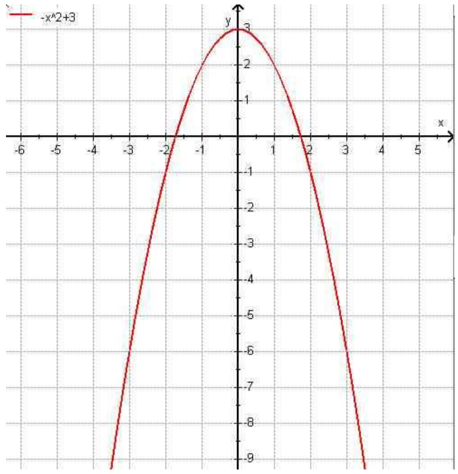
Der Graph von
$y = x^2$
stellt eine nach oben geöffnete Normalparabel dar mit Scheitelpunkt in
S = (0/0)

Der Graph von
$y = (x-2)^2$ $\quad$ $y = (x-u)^2$
stellt eine nach oben geöffnete Normalparabel dar mit Scheitelpunkt in
S = (2/0) $\quad$ S = (u/0)

Der Graph von
$y = (x+2)^2$ $\quad$ $y = (x+u)^2$
stellt eine nach oben geöffnete Normalparabel dar mit Scheitelpunkt in
S = (-2/0) $\quad$ S = (-u/0)





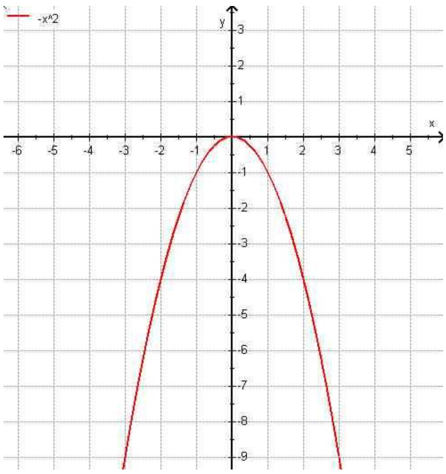


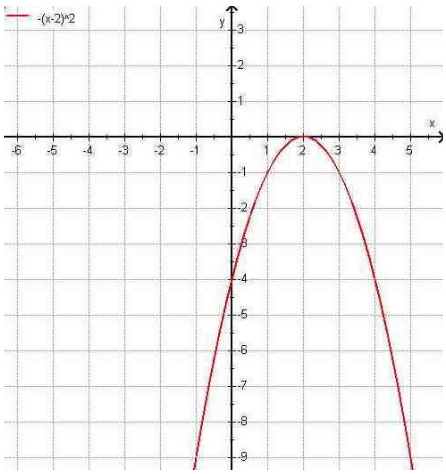
Wir halten fest:

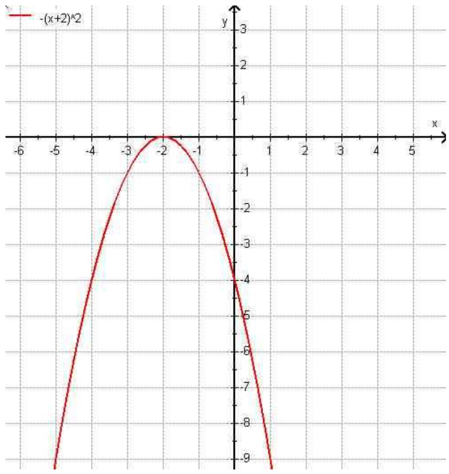
Der Graph von
$y = -x^2$
stellt eine nach unten geöffnete Normalparabel dar mit Scheitelpunkt in
$S = (0/0)$

Der Graph von
$y = -x^2-3$ $\quad y = -x^2-v$
stellt eine nach unten geöffnete Normalparabel dar mit Scheitelpunkt in
$S = (0/-3)$ $\quad S = (0/-v)$

Der Graph von
$y = -x^2+3$ $\quad y = -x^2+v$
stellt eine nach unten geöffnete Normalparabel dar mit Scheitelpunkt in
$S = (0/3)$ $\quad S = (0/v)$





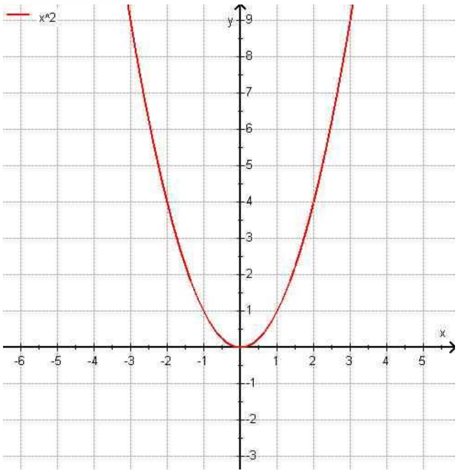


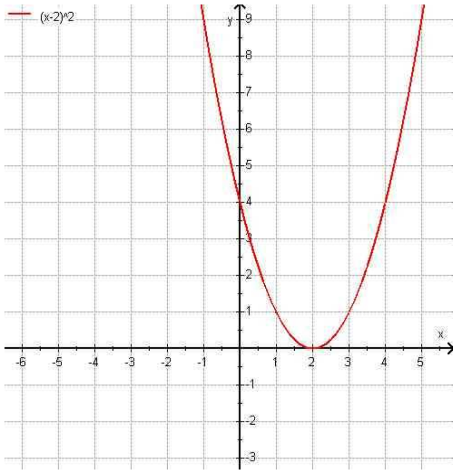
Wir halten fest:

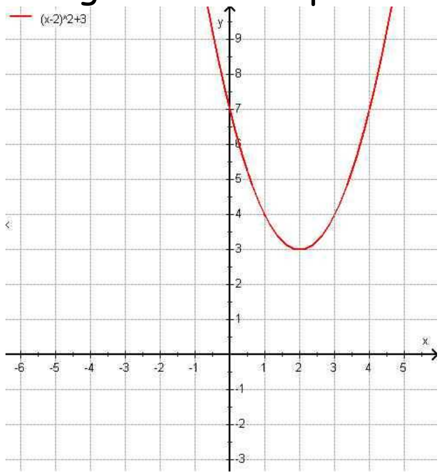
Der Graph von
$y = -x^2$
stellt eine nach unten geöffnete Normalparabel dar mit Scheitelpunkt in
$S = (0/0)$

Der Graph von
$y = -(x-2)^2$ $\quad y = -(x-u)^2$
stellt eine nach unten geöffnete Normalparabel dar mit Scheitelpunkt in
$S = (2/0)$ $\quad S = (u/0)$

Der Graph von
$y = -(x+2)^2$ $\quad y = -(x+u)^2$
stellt eine nach unten geöffnete Normalparabel dar mit Scheitelpunkt in
$S = (-2/0)$ $\quad S = (-u/0)$





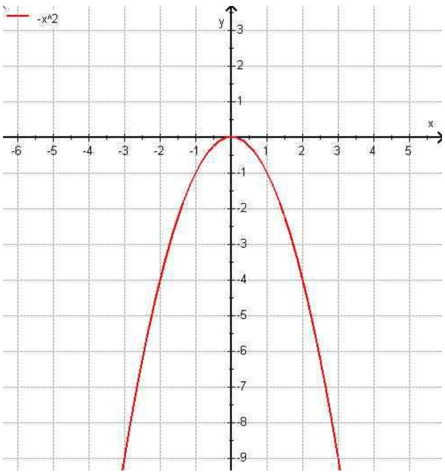


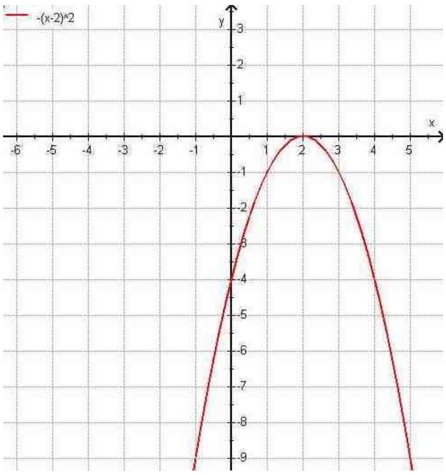
Wir halten fest:

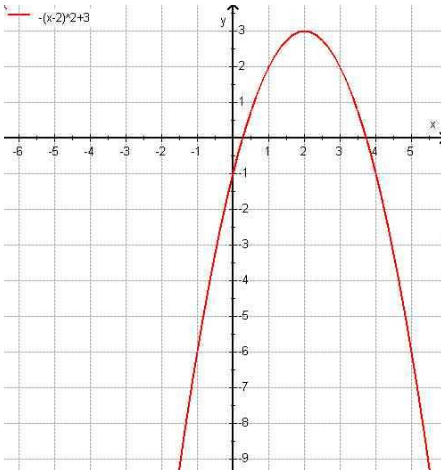
Der Graph von
$y = x^2$
stellt eine nach oben geöffnete Normalparabel dar mit Scheitelpunkt in
S = (0/0)

Der Graph von
$y = (x-2)^2$ $\quad$ $y = (x-u)^2$
stellt eine nach oben geöffnete Normalparabel dar mit Scheitelpunkt in
S = (2/0) $\quad$ S = (u/0)

Der Graph von
$y = (x-2)^2+3$ $\quad$ $y = (x-u)^2+v$
stellt eine nach oben geöffnete Normalparabel dar mit Scheitelpunkt in
S = (2/3) $\quad$ S = (u/v)







Wir halten fest:

Der Graph von
$y = -x^2$
stellt eine nach unten geöffnete Normalparabel dar mit Scheitelpunkt in
S = (0/0)

Der Graph von
$y = -(x-2)^2$ $\quad$ $y = -(x-u)^2$
stellt eine nach unten geöffnete Normalparabel dar mit Scheitelpunkt in
S = (2/0) $\quad$ S = (u/0)

Der Graph von
$y = -(x-2)^2+3$ $\quad$ $y = -(x-u)^2+v$
stellt eine nach unten geöffnete Normalparabel dar mit Scheitelpunkt in
S = (2/3) $\quad$ S = (u/v)

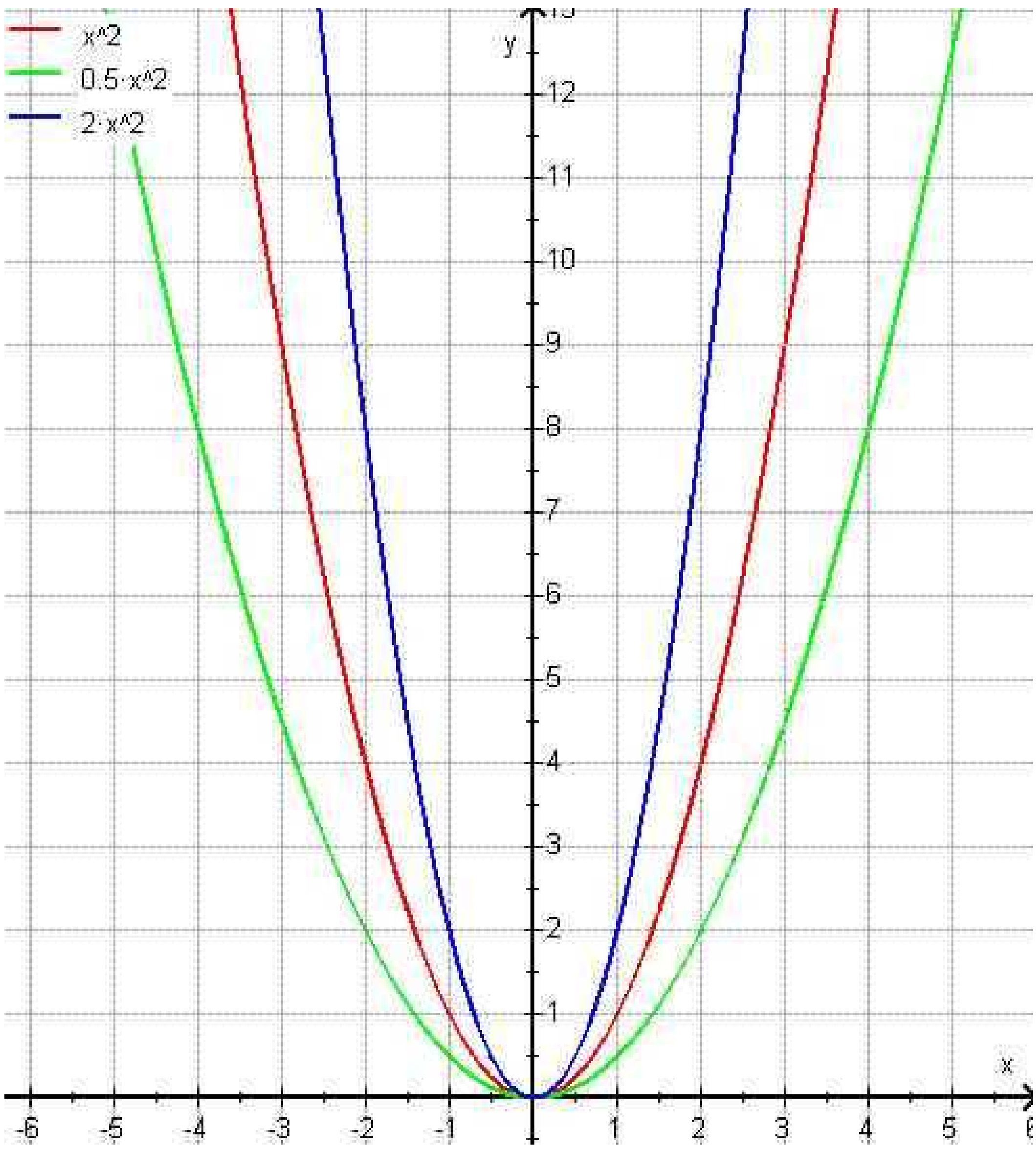
Die Stauchung der Parabel $y = ax^2$

$a > 0$: Parabel ist nach oben geöffnet (siehe Grafik)

$a > 1$	Parabel wird schmaler, steigt schneller (blau)
$a = 1$	Normalparabel (rot)
$(a > 0) \wedge (a < 1)$	Parabel wird breiter (gestaucht), steigt langsamer (grün)

$a < 0$: Parabel ist nach unten geöffnet (Graphen an der x-Achse gespiegelt)

$(a < 0) \wedge (a > -1)$	Parabel wird breiter (gestaucht), fällt langsamer (grün)
$a = -1$	an x-Achse gespiegelte Normalparabel (rot)
$a < -1$	Parabel wird schmaler, fällt schneller (blau)



Wir haben festgestellt:
Die Lage einer allgemeinen Parabel (mit Symmetrieachse parallel zur y-Achse) ist durch den Stauchungsfaktor a und den Scheitelpunkt S(-u/v) bestimmt. Wir suchen nun die allgemeine Funktionsgleichung:

Wir kombinieren nun

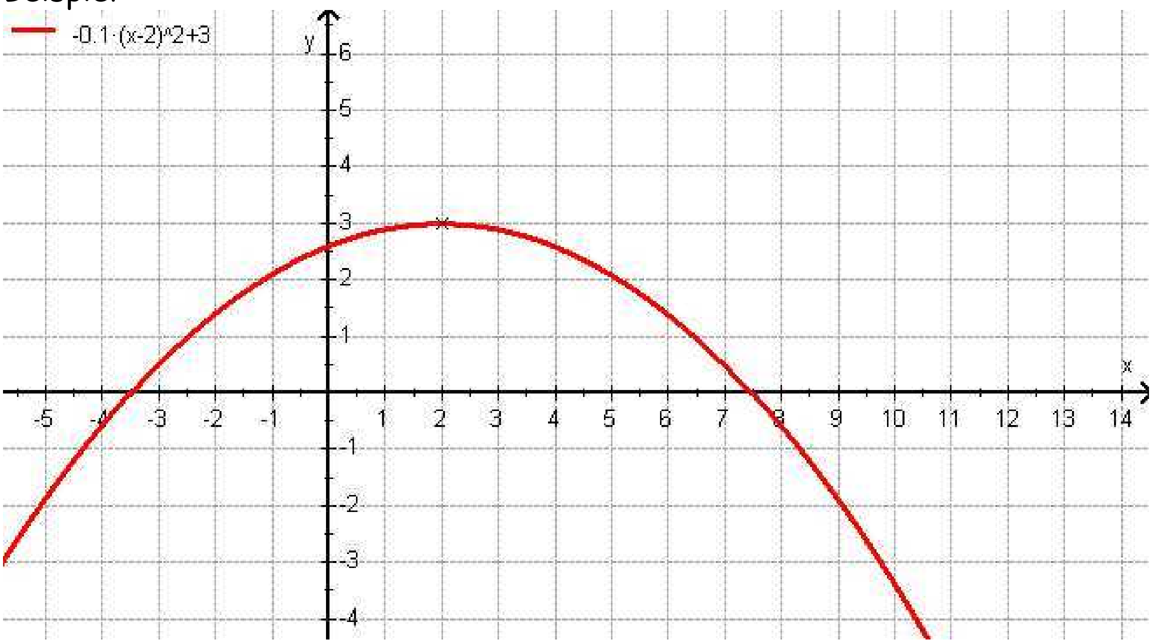
- Verschiebung in x-Richtung um -u
- Stauchung mit dem Faktor a
- Verschiebung in y-Richtung um v

1. Die Normalparabel hat die Funktionsgleichung $y = x^2$
   Diese verschieben wir um –u in x-Richtung:
2. Diese Parabel hat nun die Funktionsgleichung $y = (x + u)^2$
   Diese stauchen wir nun mit dem Faktor a:
3. Diese Parabel hat nun die Funktionsgleichung $y = a(x + u)^2$
   Diese verschieben wir nun um v in y-Richtung:
   Diese allgemeine Parabel hat nun die Funktionsgleichung: $y = a(x + u)^2 + v$

Wir halten fest:

> Die allgemeine Parabel mit dem Stauchungsfaktor a und dem Scheitelpunkt in
> S = (-u/v) hat die Funktionsgleichung → $y = a(x + u)^2 + v$.
> S = (u/v) hat die Funktionsgleichung → $y = a(x - u)^2 + v$.
> Da in dieser Darstellung die Scheitelpunktskoordinaten direkt ablesbar sind heisst diese Darstellung die **Scheitelpunktsdarstellung**.
> (Dieser Satz gilt auch umgekehrt).

Beispiel:



Wir wissen, dass der Graph der Funktion

(I) $y = (x - 2)^2 + 3$

eine nach oben geöffnete Normalparabel ist mit dem Scheitelpunkt in S(2/3).
Schreiben wir die Funktion ohne Klammern, so erhalten wir:

(II) $y = x^2 - 4x + 4 + 3$ oder zusammengefasst:

(III) $y = x^2 - 4x \quad + 7$

Meistens werden die Funktionsterme in klammerfreier Form vorgegeben:

$y = x^2 + bx + c$ wobei b und c beliebige reellen Zahlen sind

Es stellt sich nun die Frage, wie man eine solche Funktionsgleichung rückwärts umformen kann, damit die Scheitelpunktskoordinaten abgelesen werden können.
Im obigen Beispiel

$y = x^2 - 4x + 7$

sind die Koordinaten von S = (2/3) ja überhaupt nicht ersichtlich.

Wir haben also die Schritte von oben rückwärts zu machen: (III) → (II) → (I)
Wir denken an die Form

(III) $y = x^2 - 4x \quad + 7$

und gehen rückwärts:

Idee: **Quadratische Ergänzung**!

Wir leihen uns von der 7 hinten soviel aus, damit wir vorne ein Quadrat bekommen:

(IV) $y = x^2 - 4x \quad + ? \quad + 7 - ?$

Wir suchen also eine Zahl u, sodass wir schreiben können:

$x^2 - 4x + ? \quad = (x-u)^2$

Der binomische Lehrsatz lautet: $x^2 - 2ux + u^2 = (x-u)^2$
Also können wir schreiben:

$x^2 - 2ux + u^2 = x^2 - 4x + ?$ und damit

$x^2 \underline{- 2u}x + u^2 = x^2 \underline{- 4}x + u^2$ Die Aufgabe ist gelöst, wenn wir u und damit u^2 kennen:

Koeffizientenvergleich der Glieder in *x*:

$$\begin{aligned} -2u &= -4 \qquad | :(-2) \\ u &= 2 \\ u^2 &= 4 \end{aligned}$$

Damit haben wir

$x^2 - 4x + 4 \quad = x^2 - 2ux + u^2$ dies setzen wir in (II) ein und erhalten

(II) $y = x^2 - 4x \quad + 4 \quad + 7 - 4$ in die Scheitelpunktsform gebracht ergibt

(I) $y = (x - 2)^2 + 3$ und damit ist S(2/3)

Wir führen nun die quadratische Ergänzung ein zweites Mal - nicht an einem Zahlenbeispiel, sondern allgemein - durch:

Die Funktionsgleichung $y = x^2 + bx + c$

soll in die Scheitelpunktsform $y = (x + u)^2 + v$ gebracht werden:

Idee: **Quadratische Ergänzung**!

Wir leihen uns vom c hinten soviel aus, damit wir vorne ein Quadrat bekommen:

(I) $y = x^2 + bx \quad + ? \qquad + c - ?$

Wir suchen also eine Zahl u, sodass wir schreiben können:

$x^2 + bx + ? \ = (x-u)^2$

Der binomische Lehrsatz lautet: $x^2 + 2ux + u^2 = (x + u)^2$

Also können wir schreiben:

$x^2 + 2ux + u^2 = x^2 + bx + ?$ und damit

$x^2 \underline{+ 2u}x + u^2 = x^2 \underline{+ b}x + u^2$ Die Aufgabe ist gelöst, wenn wir u und damit u^2 kennen:

Koeffizientenvergleich der Glieder in x:

$$2u = b \quad | :2$$
$$u = \frac{b}{2}$$
$$u^2 = \frac{b^2}{4}$$

Damit haben wir

$$x^2 + bx + \frac{b^2}{4} = x^2 + 2ux + u^2$$ dies setzen wir in (I) ein und erhalten

$$y = x^2 + bx + \frac{b^2}{4} + c - \frac{b^2}{4}$$ in die Scheitelpunktsform gebracht ergibt

$$y = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4}$$ und damit $S(-\frac{b}{2} / c - \frac{b^2}{4})$

Wir halten fest:

> Die Parabel, die durch die Funktionsgleichung $y = x^2 + bx + c$ gegeben ist, hat den Scheitelpunkt $S = (-\frac{b}{2} / c - \frac{b^2}{4})$

Wir führen nun die quadratische Ergänzung noch ein drittes Mal durch und zwar für die allgemeinste Form einer quadratischen Funktion:

Die Funktionsgleichung $y = ax^2 + bx + c$

soll in die Scheitelpunktsform $y = a(x + u)^2 + v$ gebracht werden:

(I) $y = ax^2 + bx + c$ wir klammern zuerst noch die a aus und erhalten

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

Idee: **Quadratische Ergänzung**!

Wir leihen uns von der c hinten soviel aus, damit wir vorne ein Quadrat bekommen:

(II) $y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + ?\right) + c - a?$

Wir suchen also eine Zahl u, sodass wir schreiben können:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + u^2 = (x+u)^2$$

Der binomische Lehrsatz lautet: $x^2 + 2ux + u^2 = (x + u)^2$

Also können wir schreiben:

$x^2 + 2ux + u^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + u^2$ Die Aufgabe ist gelöst, wenn wir u und damit u^2 kennen:

Koeffizientenvergleich der Glieder in *x*:

$$2u = \frac{b}{a} \quad | :2$$

$$u = \frac{b}{2a}$$

$$u^2 = \frac{b^2}{4a^2}$$

Damit haben wir

$x^2 + \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} = x^2 + 2ux + u^2$ dies setzen wir in (II) ein und erhalten

$y = a\left(x^2 + \frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a}$ in die Scheitelpunktsform gebracht ergibt

$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$ und damit ist $S(-\frac{b}{2a} / c - \frac{b^2}{4a})$

Wir halten fest:

> Die allgemeine Parabel, die durch die Funktionsgleichung $y = ax^2 + bx + c$ gegeben ist, hat den Scheitelpunkt $S(-\frac{b}{2a} / c - \frac{b^2}{4a})$