Bestimmung des grössten gemeinsamen Teilers (ggT):

Anwendung: → Brüche kürzen

Aufgabe 1:
Bestimmen Sie den ggT von 293'265 und 10'290:

→ 1. Schritt: PFZ (Primfaktorzerlegung) beider Zahlen durchführen:

$293'265 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 19$

$10'290 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$

→ 2. Schritt: Ermittlung der gemeinsamen Faktoren:

$293'265 = \underline{3} \cdot 3 \cdot \underline{5} \cdot \underline{7} \cdot \underline{7} \cdot \underline{7} \cdot 19$

$10'290 = 2 \cdot \underline{3} \cdot \underline{5} \cdot \underline{7} \cdot \underline{7} \cdot \underline{7}$

→ 3. Schritt: Das Produkt dieser Faktoren ergibt den ggT:

$\text{ggT}(293'265, 10'290) = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 5145$

Bestimmung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen (kgV):

Anwendung: → Brüche gleichnamig machen

Aufgabe 2:
Bestimmen Sie das kgV von 293'265 und 10'290:

→ 1. Schritt: PFZ beider Zahlen durchführen:

$293'265 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 19$

$10'290 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$

→ 2. Schritt: Ermittlung der längsten Primzahlketten aller verschiedenen Primfaktoren:

$293'265 = \underline{3} \cdot \underline{3} \cdot \underline{5} \cdot \underline{7} \cdot \underline{7} \cdot \underline{7} \cdot \underline{19}$

$10'290 = \underline{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$

→ 3. Schritt: Das Produkt dieser Faktoren ergibt das kgV:

$\text{kgV}(293'265, 10'290) = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 19 = 586'530$

Beispiel:

586'530 = $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 19$

586'530 = $2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^3 \cdot 19^1$

586'530 = $2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^3 \cdot 19$

Die Primzahlen findet man mit dem Sieb des Eratosthenes:

Aufgabe: Darstellung aller Primzahlen < 100 in aufzählender Form

Vorgehen nach Eratosthenes:

1. Man notiere alle natürlichen Zahlen von 1 bis 99
2. Man suche die erste Primzahl und markiere sie als solche – das ist 2;
3. Man streiche alle Vielfachen dieser Primzahl
4. Man suche die kleinste nicht gestrichene Zahl und markiere sie als Primzahl
   falls man keine mehr findet ist man fertig, ansonsten weiter mit 3.
   Übrigens – Zahlen grösser 9 muss man nicht mehr testen – warum?

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53
54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99						

Lösung: (Es gibt 25 Primzahlen, die kleiner als 100 sind)

2	3		5		7				11		13				17		19				23				
	29		31						37				41		43				47						53
					59		61						67				71		73						79
			83						89								97								

Übrigens – darum:

Wäre eine Zahl das Produkt zweier Zahlen wobei eine grösser als 10 ist (allgemein: $\sqrt{n}$), dann müsste die andere kleiner als 10 sein und wäre demzufolge bereits geprüft worden.

Bemerkungen:

- Es gibt nur eine gerade Primzahl: 2
- Es gibt unendlich viele Primzahlen
- Primzahlen mit der Differenz 2 nennt man **Primzahlzwillinge**
  (Man kann (noch) nicht beweisen, dass es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt)

Die **elementare Zahlentheorie** beschäftigt sich hauptsächlich mit den natürlichen Zahlen und deren Teilbarkeit.

Jede natürliche Zahl kann in Faktoren (Teiler) zerlegt werden:

→ $6 = 1 \cdot 6$ oder
→ $6 = 2 \cdot 3$

→ $12 = 1 \cdot 12$ oder
→ $12 = 2 \cdot 6$ oder
→ $12 = 3 \cdot 4$ oder
→ $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$

Jede natürliche Zahl kann als Produkt ihrer **trivialen Teiler** geschrieben werden:
→ $n = 1 \cdot n$

Definition:
Primzahlen sind die natürlichen Zahlen, die nur die trivialen Teiler haben.
Primzahlen sind nur durch 1 und sich selbst teilbar. 1 ist keine Primzahl.
Bezeichnung:
Menge der Primzahlen: $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots\}$

Es gilt nun der **Fundamentalsatz der elementaren Zahlentheorie**:

In Worten:

→ **Jede natürliche Zahl > 1 lässt sich (bis auf die Reihenfolge) eindeutig als Produkt von Primzahlen schreiben.**
(Dabei dürfen die Primfaktoren auch mehrmals vorkommen).
→ **Jede natürliche Zahl > 1 lässt sich (bis auf die Reihenfolge) eindeutig in Primfaktoren zerlegen.**

In Formelschreibweise:

→ $\boxed{n = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{n_m}}$

Diese Darstellung gilt für alle $n \in \mathbb{N} \setminus 1$ und
$n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$ und
$p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{P}$ und paarweise verschieden