Georg Cantor

Georg Cantor, * 3. März 1845 in Sankt Petersburg; † 6. Januar 1918 in Halle (Saale), war ein deutscher Mathematiker.
Cantor lieferte wichtige Beiträge zur modernen Mathematik. Insbesondere ist er der Begründer der Mengenlehre.

Er studierte in Darmstadt, Zürich und Göttingen und wurde 1867 in Berlin promoviert. Zu seinen Lehrern zählten Karl Weierstrass, Ernst Eduard Kummer und Leopold Kronecker. Nach der Promotion lehrte und arbeitete er von 1869 an bis zu seinem Lebensende in Halle, zunächst als Privatdozent, seit 1872 als Extraordinarius und seit 1877 bis zu seiner Emeritierung im Jahr 1913. Von 1884 an und verstärkt seit 1899 litt Cantor wiederholt an manischer Depression und musste sich mehrmals in psychiatrische Behandlung begeben. Cantors Beschäftigung mit der Frage nach dem "wahren" Autor der shakespearschen Werke fällt in die erste Zeit seiner geistigen Erkrankung. Auf Cantor geht folgende Definition über Mengen zurück:

> *Eine Menge ist eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedlicher Dinge unserer Anschauung oder unseres Denkens, welche Elemente der Menge genannt werden, zu einem Ganzen.*

Cantor gilt als Begründer der Mannigfaltigkeitslehre (1877) (heute Mengenlehre) durch die Betrachtung eineindeutiger Zuordnungen der Elemente von unendlichen Mengen. Er bezeichnete Mengen, für die eine solche Beziehung hergestellt werden kann als äquivalent oder „von gleicher Mächtigkeit“. Demnach ist die Menge der natürlichen Zahlen {1, 2, 3, ...} der Menge der rationalen Zahlen (Brüche) äquivalent, was er durch sein Diagonalisierungsverfahren zeigte.

Schliesslich schuf Cantor 1870 mit der so genannten Punktmenge die Grundlagen der später von Benoît Mandelbrot so bezeichneten Fraktale. Die Cantorsche Punktmenge folgt dem Prinzip der unendlichen Wiederholung selbstähnlicher Prozesse. Die Cantor-Menge gilt als das älteste Fraktal überhaupt.

Mengen und Elemente

Georg Cantor[1] hat den Begriff der Menge wie folgt erklärt:

«Eine *Menge* ist die Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.»

Die Objekte, aus denen sich die Menge zusammensetzt, nennt man ihre *Elemente*. Um auszudrücken, dass ein Element a einer Menge A angehört, schreibt man $a \in A$. Man schreibt $a \notin A$, wenn a nicht zu A gehört. Eine Menge kann auf verschiedene Arten festgelegt werden:

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ (*aufzählende Form*)

$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist kleiner als } 5\}$ (*beschreibende Form*)

Die Mengen A und B enthalten dieselben Elemente. Daher schreibt man $A = B$.

Eine Menge heisst *endlich*, wenn die Aufzählung ihrer Elemente einmal abbricht, andernfalls heisst sie *unendlich*.

Beispiele:

$T_6 = \{1, 2, 3, 6\}$ = Menge der natürlichen Teiler der Zahl 6 (endliche Menge)

$V_6 = \{6, 12, 18, \ldots\}$ = Menge der natürlichen Vielfachen von 6 (unendliche Menge)

[1] Siehe Portrait von Georg Cantor

Teilmengen

Um auszudrücken, dass die Menge A *Teilmenge* oder *Untermenge* der Menge B ist, schreibt man $A \subset B$ (oder $B \supset A$). Dies besagt, dass jedes Element von A auch zu B gehört. B heisst dann eine *Obermenge* von A. Umgekehrt bedeutet die Schreibweise $A \not\subset B$, dass mindestens ein Element von A nicht zu B gehört. Falls A und B kein Element gemeinsam haben, nennt man sie *elementfremd*. Die *leere Menge* enthält kein Element, sie wird mit $\{\ \}$ bezeichnet. Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge. Alle Objekte, die bei einer Mengenbetrachtung zugelassen sind, bilden die *Grundmenge* G, und die beteiligten Mengen sind als Teilmengen von G zu betrachten.

Mengenverknüpfungen

Die *Durchschnittsmenge (Schnittmenge)* zweier Mengen A und B besteht aus den Elementen, die sowohl zu A als auch zu B gehören.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \quad \text{und zugleich } x \in B\} \qquad (\text{“}A \text{ geschnitten mit } B\text{”})$$

Die *Vereinigungsmenge* zweier Mengen A und B besteht aus den Elementen, die zu A, zu B oder zu beiden gehören.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \quad \text{oder auch } x \in B\} \qquad (\text{“}A \text{ vereinigt mit } B\text{”})$$

Die *Differenzmenge* von A und B besteht aus den Elementen, die zu A, aber nicht zu B gehören.

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \quad \text{und zugleich } x \notin B\} \qquad (\text{“}A \text{ ohne } B\text{”})$$

Die *Komplementärmenge (Ergänzungsmenge)* von A besteht aus allen Elementen der Grundmenge G, die nicht zu A gehören.

$$\overline{A} = G \setminus A = \{x \in G \mid x \notin A\} \qquad (\text{“Komplement von } A\text{”})$$